سلسلۂ مطبوعات تعلیم جامعۂ عثمانیہ

ہندسی مخروطات

انٹرمیڈیٹ کے لئے بربنائے جیومیٹریکل کونکس کوک شوٹ اینڈ والٹرز

مترجمہ
قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے (پنجاب)
بی۔ اے، ایل ایل۔ بی (کیمبرج) رینگلر سنہ ۱۹۱۴ء، فلر اگزیبشنر (پنجاب)
گورنمنٹ آف انڈیا سکالر کیمبرج (ریاضیات)، ایمینول اگزیبشنر کیمبرج (ریاضیات)
ایمینول فونڈیشن اسکالر کیمبرج (ریاضیات)
رکن سررشتۂ تالیف و ترجمہ
جامعۂ عثمانیہ

سنہ ۱۳۳۸ھ م سنہ ۱۳۲۹ف م سنہ ۱۹۲۰ء

مطبوعہ دار الطبع سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب میکملن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مُقدّمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دَور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے **جاپان** پر یہی گذری اور یہی حالت اب **ہندوستان** کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطعِ تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح **یونان** کا اثر روم اور دیگر اقوام **یورپ** پر پڑا جس طرح **عرب** نے **عجم** کو اور **عجم** نے **عرب** کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے **یورپ** میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل **ترجمہ** ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی، ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف وتالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سُجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلداللہ ملکہٗ و سلطنتہٗ نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی، جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیوٹ میں جس کی بنا سر سیّد احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ اُنہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرّشید و مامون الرّشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور مُت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیحضرت واقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخرد مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علمِ ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علمِ ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلّط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت واقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعوے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیّا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے **سررشتۂ تالیف و ترجمہ** قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں **عثمانیہ یونیورسٹی کالج** کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شایقینِ علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ اِن کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے ۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے ۔ لیکن اس سے گزیر نہیں ۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں ۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں، بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے ۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدّد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں ۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیرمانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں ۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں ۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہو سکے، بلکہ **فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف **اصطلاحات علمیہ** تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کامل ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور اعلیٰحضرت واقدس کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے' اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرنا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ اِن کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمدؐ اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ اِی۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکان دار الترجمہ

مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔۔۔۔۔ناظم۔
قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر۔۔۔۔۔مترجم ریاضیات
چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔۔۔۔۔مترجم سائینس
مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔۔۔۔۔۔مترجم تاریخ۔
مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔۔مترجم معاشیات
قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔ اے۔۔۔۔۔۔مترجم سیاسیات
مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔مترجم تاریخ۔
مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔۔مترجم فلسفہ ومنطق
مولوی عبدالحلیم صاحب شرر۔۔۔۔۔۔۔۔مولف تاریخ اسلام
مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔مترجم قانون۔
مولوی عبداللہ العمادی صاحب۔۔۔۔۔۔مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں +

اردو مجلس وضع اصطلاحات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)

مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دار العلوم

نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)

مولوی وحید الدین صاحب سلیم

مولوی عبد الحق بی۔ اے ناظم سررشتۂ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتۂ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔ اے رنیگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)

مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دار العلوم حیدرآباد)

پروفیسر عبد الرحمٰن صاحب۔ بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)

مرزا محمد ہادی صاحب۔ بی۔ اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

ہندسی مخروطات

قطع مکافی یا شلجمی

تعریف۔ اگر ایک نقطہ (ن) کا فاصلہ ایک ثابت نقطہ (س) سے ہمیشہ برابر ہو اُس عمودی فاصلہ (ن م) کے جو نقطہ (ن) اور ایک ثابت مستقیم خط (لام) کے درمیان ہے تو ن کے طریق کو [یعنی اُس خط کو جس پر کہ (ن) ان شرائط کے ماتحت حرکت کرسکتا ہے] قطع مکافی (یا شلجمی) کہتے ہیں۔

(س ن = ن م)

۲۔ ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں۔

۳۔ ثابت مستقیم خط (لام) کو مرتب کہتے ہیں

تعریف۔ خط منحنی بلحاظ ایک خط مستقیم کے متشاکل اُس وقت ہوتا ہے جبکہ منحنی کے کسی ایک

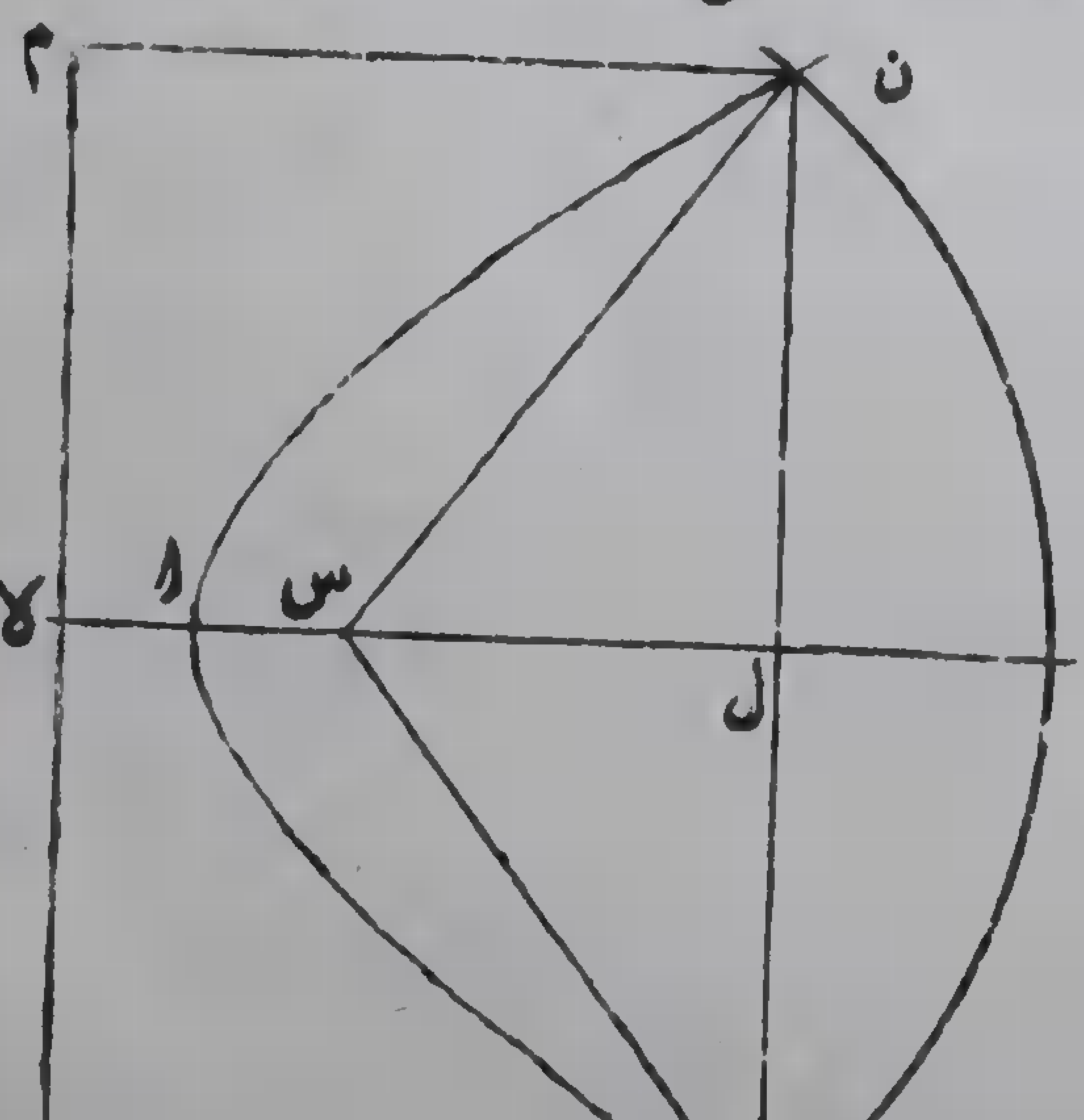
نقطہ کے مقابل خط مستقیم کی دوسری طرف منحنی پر ایک اور نقطہ ایسا ہو کہ ان نقطوں کو ملانے والا وتر خط مستقیم سے زاوئے قائمے بنائے اور نقطۂ تقاطع پر خود دو برابر حصوں میں تقسیم ہو جائے۔

تعریف۔ مذکورہ بالا خط مستقیم کو منحنی کا محور کہتے ہیں۔

تعریف۔ جس نقطہ پر محور منحنی سے ملتا ہے اُس کو راس کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱

شلجمی پر نقطے دریافت کرنے کا عمل۔ اگر ماسکہ سے مرتب پر عمود نکالا جائے تو وہ شلجمی کا محور تشاکل ہوگا۔



فرض کرو کہ س ماسکہ ہے اور م لا مَ مرتب ہے۔ س میں سے ایک ایسا مستقیم خط س لا کھینچو جو مرتب

پر عمود ہو اور اس کو سمت لاس میں لا انتہا خارج کرو۔
س لا کی تنصیف ا پر کرو، تب چونکہ س ا = ا لا
اس لئے نقطہ ا شلجمی پر واقع ہے۔

لاس یا لاس ممدودہ پر کوئی نقطہ ل لو، ل میں سے ایک ایسا مستقیم خط ن ل نَ کھینچو جو لا ل پر عمود ہو، س کو مرکز مان کر ایک ایسا دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر لا ل ہو اور جو ن ل نَ کو ن اور نَ پر قطع کرے (اگر ممکن ہو) نیز مرتب پر عمود ن م اور نَ م کھینچو۔

تب چونکہ س ن = ل لا = ن م
اس لئے نقطہ ن شلجمی پر ہے
اسی طرح سے نَ شلجمی پر ہے
چونکہ ل ن = ل نَ [اقلیدس م ۳ شکل ۳]
اس لئے لاس، ن نَ سے زاویے قائمے بناتا ہے اور نقطہ تقاطع پر اس کی تنصیف کرتا ہے پس منحنی بلحاظ لاس کے متشاکل ہے۔

(۱) اگر ل اور س دونوں ا کے ایک ہی طرف واقع ہوں تو س ل، ل لا سے کم ہوگا اور دائرہ اس صورت میں خط ن ل نَ کو قطع کرے گا۔

(۲) اگر ل اور س، ا کی متقابل جانبوں میں واقع ہوں تو دائرہ مستقیم خط ن ل نَ کو قطع نہیں کریگا۔

پس معلوم ہوا کہ شلجمی وسعت میں غیر محدود ہے لیکن یہ سب کا سب اُس مستقیم خط کی ایک ہی جانب میں واقع ہے جو ا میں سے گزرتا ہے اور اس پر عمود ہے۔

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۷)

تعریف۔ شلجمی کا محور (س لا) وہ مستقیم خط ہے جو ماسکہ میں سے گزرتا ہے اور مرتب پر عمود ہے۔

تعریف۔ شلجمی کا راس (ا) وہ نقطہ ہے جہاں محور منحنی کو قطع کرتا ہے۔

تعریف۔ شلجمی کے کسی نقطہ کا معین (ن ل) وہ عمود ہے جو نقطہ (ن) سے محور پر نکالا جائے

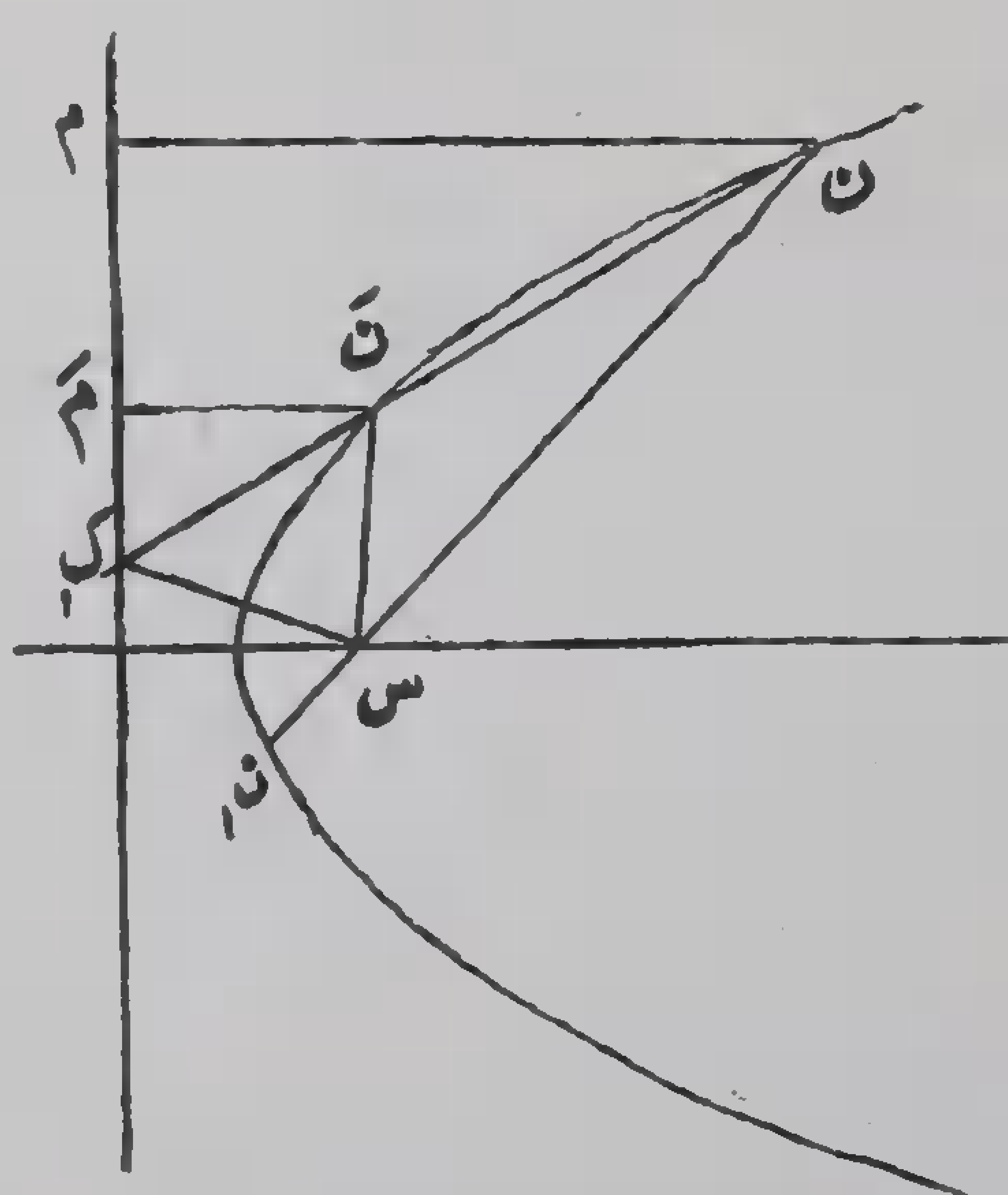
تعریف۔ فصلہ (ا ل) محور کا وہ حصہ ہے جو راس اور معین کے درمیان ہو۔

تعریف۔ شلجمی کے کسی نقطہ کا ماسکی فاصلہ وہ فاصلہ ہے جو اُس نقطہ اور ماسکہ کے درمیان ہو

مسئلہ ۲

اگر وتر ن نَ مرتب کو نقطہ ک پر قطع کرے تو س ک ماسکی فاصلوں س ن اور س نَ کے خارجی زاوے کی تنصیف کرے گا۔

س ن اور س نَ کو ملاؤ۔



مرتب پر عمود ن م، نَ مَ کھینچو اور ن س کو نٖ تک خارج کرو
تب متشابہ مثلثات ن ک م اور نَ ک مَ سے

ن ک : نَ ک = ن م : نَ مَ

= س ن : س نَ

∴ س ک خارجی زاویہ نَ س نٖ کی تنصیف کرتا ہے

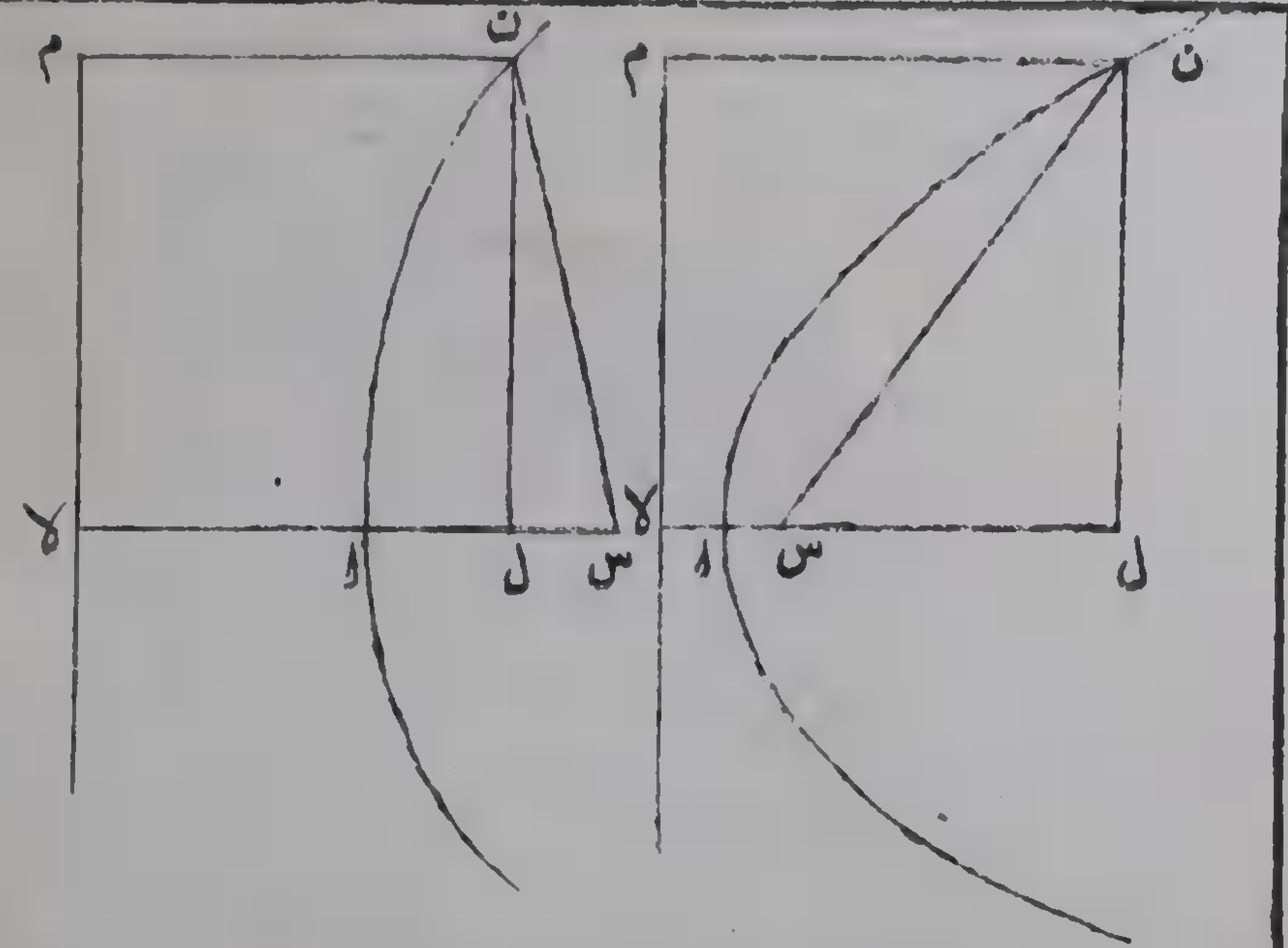
[اقلیدس م ۶ ش ۱]

مسئلہ ۳

اگر شلجمی پر کے کسی نقطہ ن کا معیّن ن ل ہو تو ثابت کرو کہ

ن ل٢ = ۴ ا س × ا ل

س ن کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م کھینچو۔



تب ل لا^2 = لا ا^2 + ا ل^2 + ۲ لا ا × ا ل [اقلیدس م ۲ ش ۴]

= ا س^2 + ا ل^2 + ۲ ا س × ا ل

= ۲ ا س × ا ل + س ل^2 + ۲ ا س × ا ل [اقلیدس م ۲ ش ۷]

= ۴ ا س × ا ل + س ل^2

لیکن ل لا^2 = ن م^2 = س ن^2

= ن ل^2 + س ل^2

∴ ن ل^2 + س ل^2 = س ل^2 + ۴ ا س × ا ل

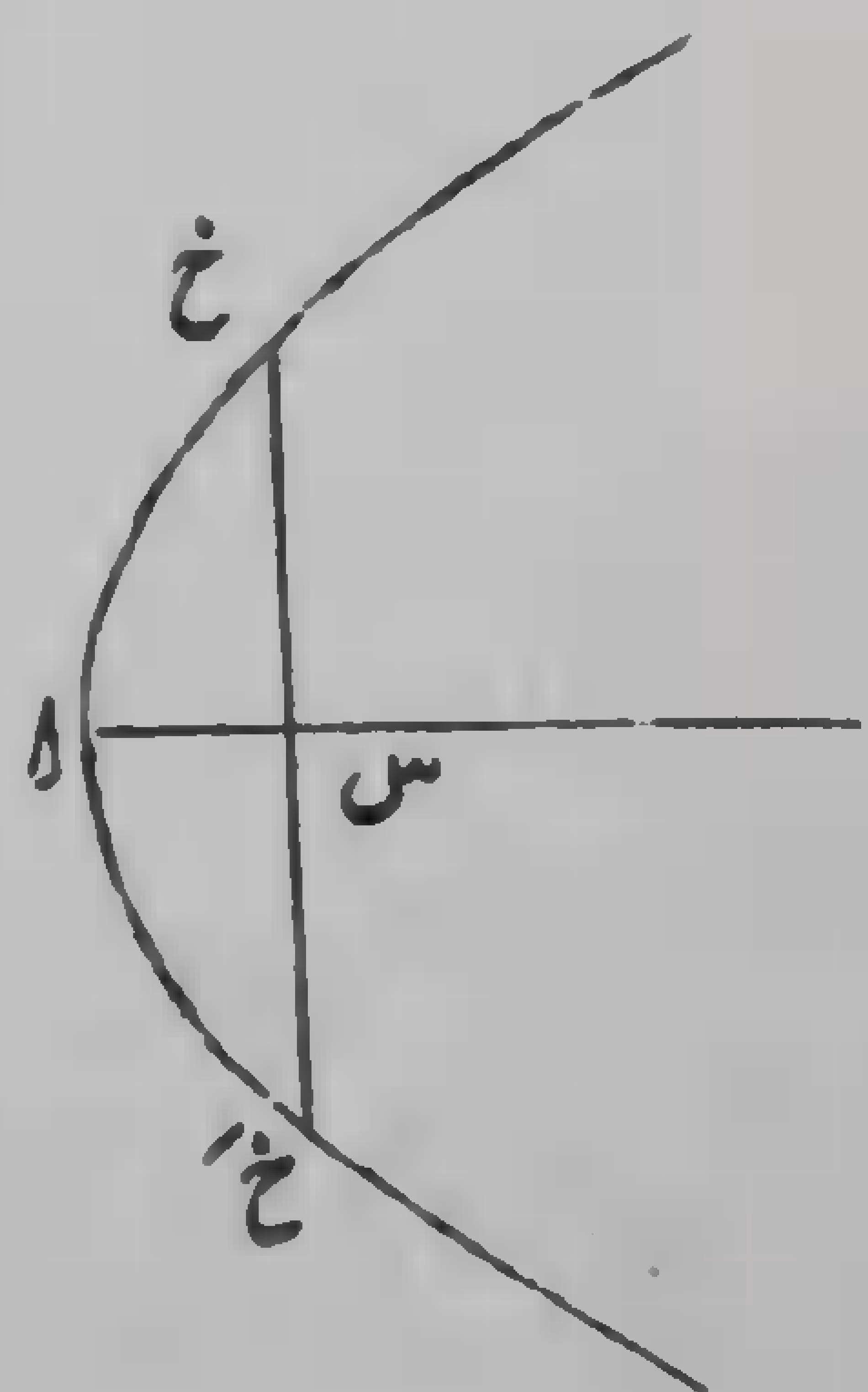
∴ ن ل^2 = ۴ ا س × ا ل

تعریف۔ ماسکہ میں جو دُگنا معین گزرتا ہے اس کو ہم

آیندہ وتر خاص یا معدل (خ خَ) کے نام سے موسوم کریں گے۔

مسئلہ ۴

شلجمی کا وتر خاص خ خَ = ۴ ا س



س خ^۲ = ۴ ا س × ا س (مسئلہ ۳)

∴ س خ = ۲ ا س

∴ خ خَ = ۴ ا س

مشقی مثالین مسئلہ ۱

۱۔ بذریعہ اقلیدس م ا ش ۲۳ شلجمی کے محیط کے نقاط دریافت کرو اور اس کو مرتسم کرو۔

۲۔ شلجمی کے دو دگنے معین ن نَ، ق قَ ہیں، ثابت کرو کہ

ن تی، نَ قَ محور سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

۳۔ اگر مرتب کے متوازی ا میں سے ایک خط کھینچا جائے اور س م اس خط سے ما پر ملے تو ثابت کرو کہ س م کی تنصیف ما پر ہوتی ہے [دیکھو شکل مسئلہ ا]

۴۔ نیز ثابت کرو کہ ن ما، س م پر عمود ہے اور زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے۔

۵۔ اگر س سے ماسکی فاصلہ س ن پر عمود ہو اور مرتب سے نقطہ ے پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ے زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے۔

۶۔ اگر ایک شلجمی کے دو ماسکی وتر برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان کے وسطی نقطوں کو ملانے والا خط محور سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔

۷۔ اگر ایک دائرہ ایک نقطہ معینہ میں سے گزرے اور ایک دیے ہوئے مستقیم خط کو مس کرے تو اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۸۔ اگر ایک دائرہ ایک دئے ہوئے دائرہ اور مستقیم خط دونوں کو مس کرے تو اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۹۔ اگر کوئی خط محور کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ وہ شلجمی سے ایک ہی نقطہ پر ملے گا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۲

۱۔ ن نَ شلجمی کا ایک ماسکی وتر ہے اور ق ایک اور نقطہ منحنی پر ہے اگر ن ق، نَ ق مرتب سے بالترتیب نقاط ک اور کَ

پر ملیں تو ثابت کرو کہ ک س کَ زاویہ قائمہ ہے۔

۲- ن ق اور نؔ قؔ دو ماسکی وتر ہیں، ثابت کرو کہ ن نؔ اور ق قؔ ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں نیز ن قؔ اور نؔ ق بھی ایک دوسرے کو مرتب پر ملتے ہیں۔

۳- اگر وہ مرتب سے ک اور کَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ ک س کَ زاویہ قائمہ ہے،

۴- ا کو مرتب کے مختلف نقطوں سے ملاؤ اور مسئلہ ۲ صفحہ (۴) کی مدد سے شلجمی کو مرتسم کرو۔

۵- شلجمی پر کوئی نقطہ ن ہے، اگر ن ا ممدودہ مرتب سے ک پر ملے تو ثابت کرو کہ م س ک زاویہ قائمہ ہے۔

۶- ایک شلجمی اور اُس کا ماسکہ دیا ہوا ہے، مرتب دریافت کرو۔

۷- ن ق ایک شلجمی کا دگنا معین ہے اور ن کا منحنی کو نقطہ نَ پر قطع کرتا ہے ثابت کرو کہ نَ ق ماسکہ میں سے گزرتا ہے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۳

۱- ن نَ شلجمی کا دگنا معیّن ہے اگر ن ا نَ کے گرد ایک دائرہ کھینچیں اور وہ محور سے ایک دوسرے نقطہ ی پر ملے تو ثابت کرو کہ ل ق مستقل ہے اور اس کا طول دریافت کرو۔

۲- ن ل نَ شلجمی کا ایک دگنا معین ہے شلجمی پر ایک اور نقطہ ق ہے جس میں سے دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں، ایک خط راس میں سے گزرتا ہے اور دوسرا محور کے متوازی ہے یہ

خط ن نَ کو خ اور خَ پر قطع کرتے ہیں۔

ثابت کرو کہ ل خ × ل خَ = ن لَ

مشقی مثالیں مسئلہ ۴

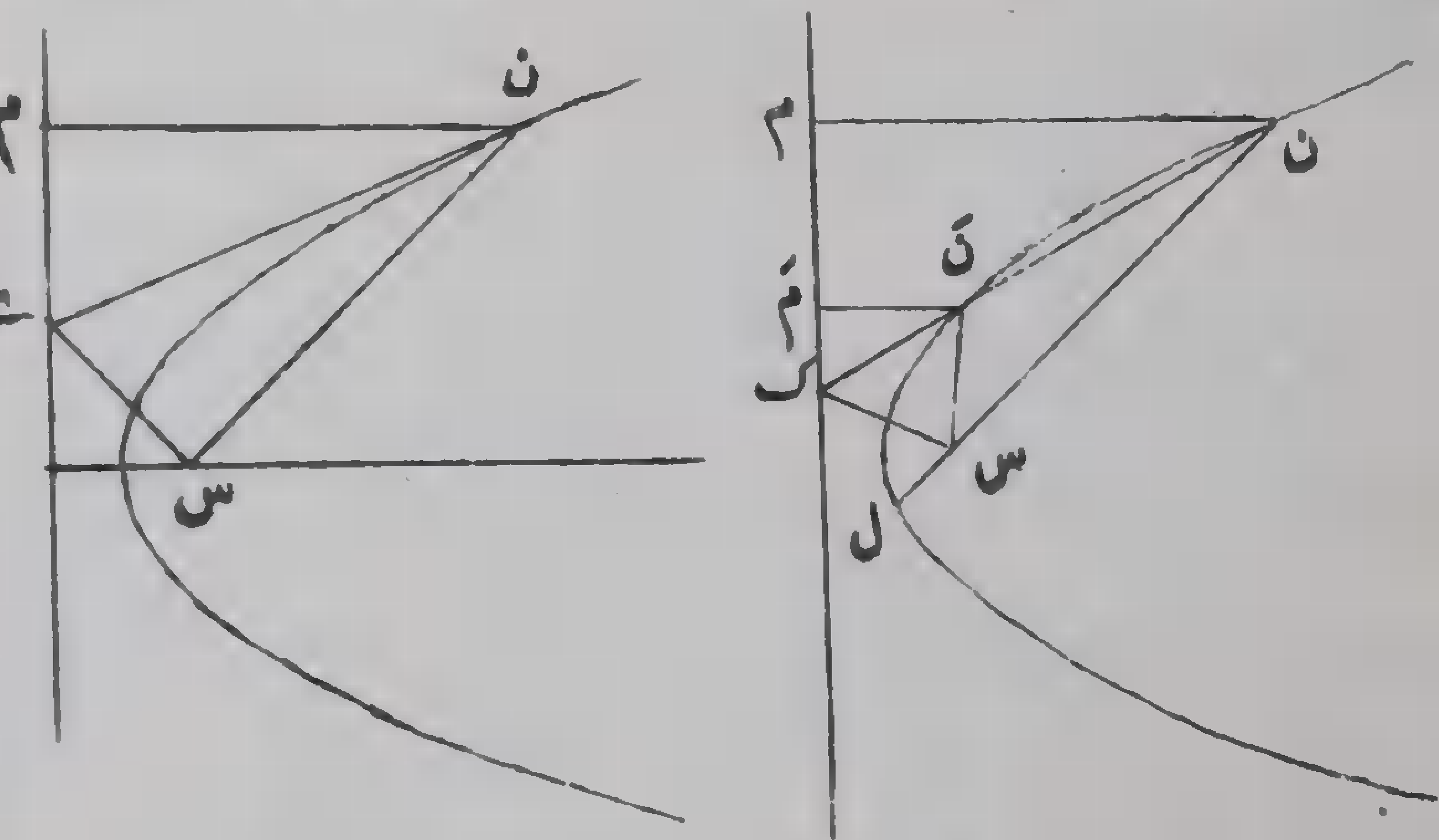
۱۔ شلجمی کا ایک دگنا معین ن نَ دریافت کرو جو وتر خاص کا دوچند ہو

۲۔ اگر ایک مثلث خ ا خَ کے گرد ایک دائرہ بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر = ۵/۸ × وتر خاص کا طول

تعریف۔ فرض کرو کہ ن نَ منحنی کا کوئی وتر ہے اگر نَ حرکت کر کے ن کے اتنا قریب آجائے کہ یہ دونوں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہونے کو ہوں تو اس انتہائی مقام میں وتر ن نَ کو منحنی کا مماس نقطہ ن پر کہتے ہیں۔

مسئلہ ۵

اگر شلجمی کے نقطہ ن پر مماس کھینچیں اور وہ مرتب سے ھ پر ملے تو ثابت کرو کہ ن س ھ زاویہ قائمہ ہے اور ن پر کا مماس اُس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے جو ماسکی فاصلہ س ن اور عمود ن م کے درمیان ہو جہاں ن م نقطہ ن سے مرتب پر عمود نکالا گیا ہے نیز ثابت کرو کہ راس پر کا مماس محور سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔



مسئلہ ۲ کی شکل میں فرض کرو کہ نقطہ نَ حرکت کر کے ن پر پہنچتا ہے اور وتر ن نَ ک مماس ن ے بن جاتا ہے جب ایسا ہو گا تو س ک، س ے پر منطبق ہو گا اور س نَ، س ن پر نیز زاویہ نَ س ن دو قائموں کے برابر ہو گا لیکن نَ س ک زاویہ نَ س ل کا نصف ہے (مسئلہ ۲) اس لئے ن س ے دو قائموں کا نصف ہے یعنی ن س ے ایک زاویہ قائمہ ہے۔ مرتب پر عمود ن م کھینچو۔

ن م^2 + م ے^2 = ن ے^2 [اقلیدس م ا ش ۴۷]

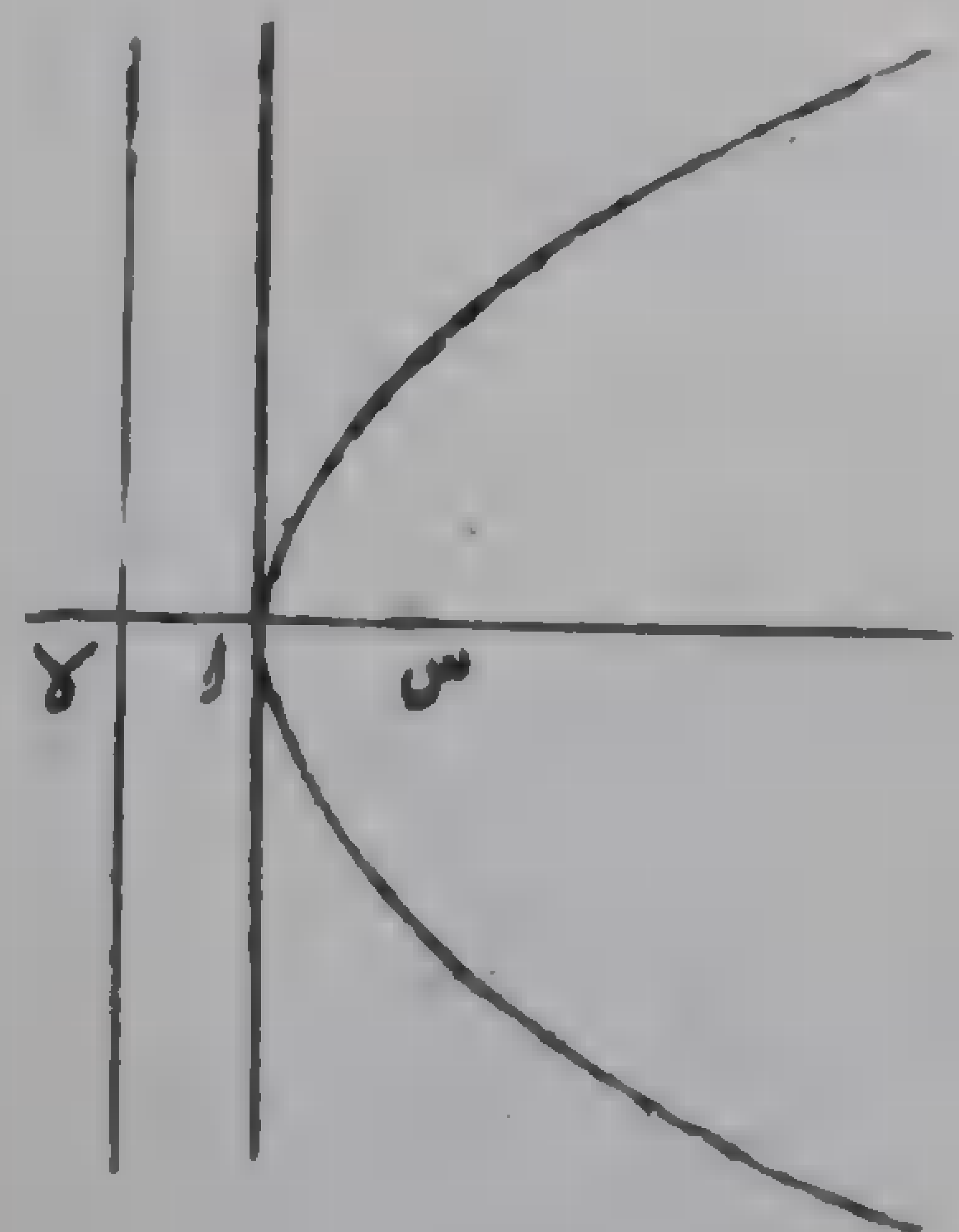
= س ن^2 + س ے^2

∴ م ے^2 = س ے^2 چونکہ ن م = س ن

∴ م ے = س ے

∴ مثلثوں ے م ن اور ے ن س میں

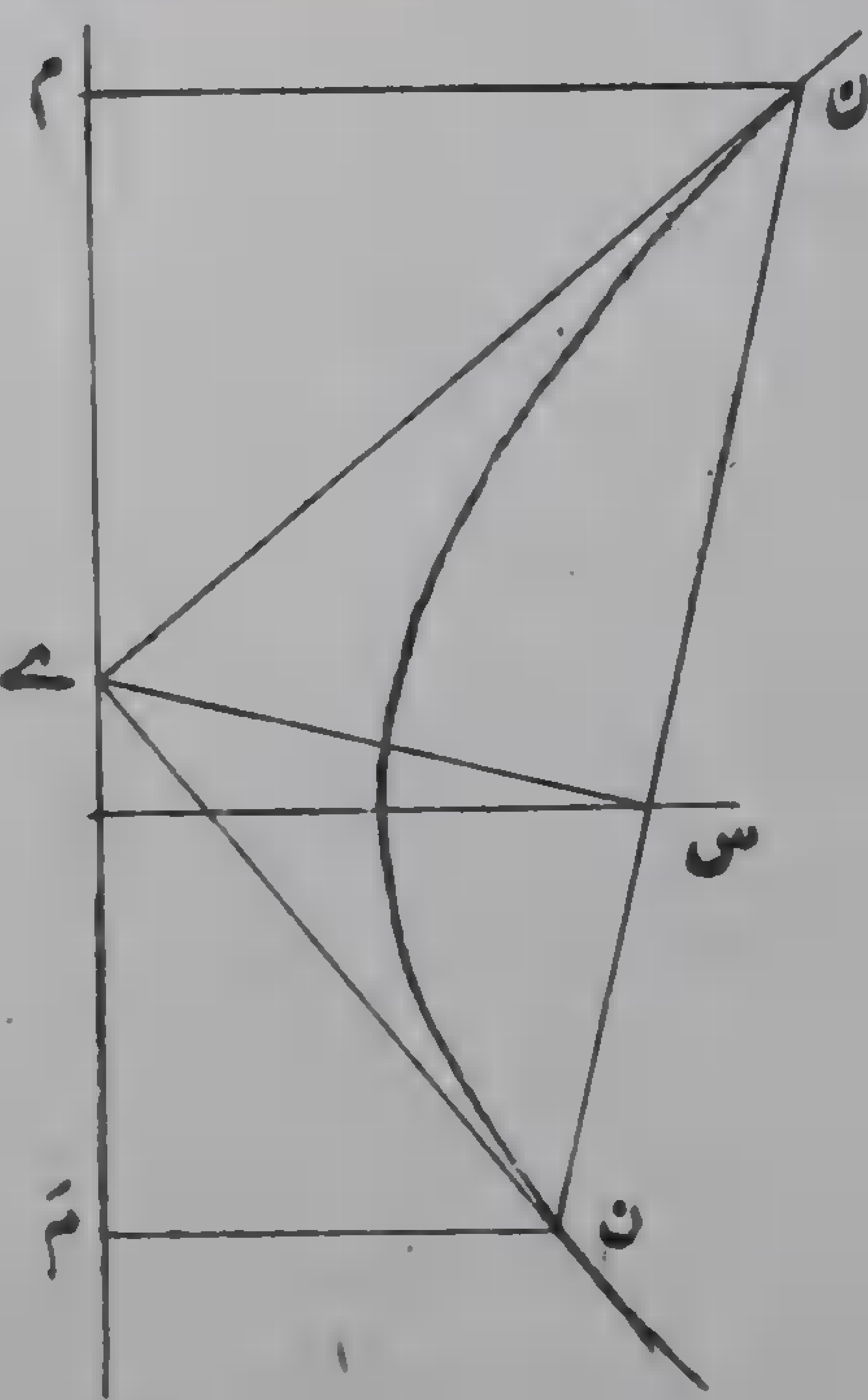
ن م ، م ے بالترتیب ن س ، س ے کے مساوی ہیں اور ن ے دونوں میں مشترک ہے
∴ زاویہ م ن ے = س ن ے [اقلیدس م ا ش ۸]



اگر نقطہ ن راس ا پر لیا جائے تو زاویہ س ن م دو قائموں کے برابر ہوگا اور اس لئے مستقیم زاویہ س ا لا پر منطبق ہوگا۔
اب چونکہ مماس زاویہ کی تنصیف کرتا ہے اس لئے وہ محور سے زاویہ قائمہ بنائے گا۔
شلجمی کی تعریف سے ثابت کرو کہ جو مستقیم خط زاویہ س ن م کی تنصیف کرتا ہے وہ منحنی سے ایک دوسرے نقطہ پر نہیں مل سکتا
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۱۴)

مسئلہ ۶

اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ مرتب پر ملتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں



فرض کرو کہ ن س ن ایک ماسکی وتر ہے اور ن پر کا مماس مرتب کو ے پر قطع کرتا ہے

ے س، ے ن کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م، ن م کھینچو۔

تب چونکہ ن ے، ن پر مماس ہے

اسلئے س ے خط ن س ن سے زاویہ قائمہ بناتا ہے (مسئلہ ۵)

اسلئے ن ے، ن پر مماس ہے

نیز چونکہ △ س ن ے = م ن ے [اقلیدس م اش ۴]

اسلئے ∠ س ے ن = ∠ ن ے م

اسلئے س ے ن، س ے م کا نصف ہے

اسی طرح سے س ے ن، س ے م کا نصف ہے

اسلئے ن ے ن زاویوں س ے م اور س ے م کے مجموعہ کا نصف ہے یعنی یہ دو قائموں کا نصف ہے

اس لئے ن ے ن ایک قائمہ ہے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۵

۱۔ اگر وتر خاص کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو مرتب کے نقطہ لا پر قطع کرتے ہیں۔

۲۔ اگر ن پر کوئی مماس کھینچا جائے اور اس پر ایک نقطہ و لیا جائے تو ثابت کرو کہ و م = و س

۳۔ اگر ن اور نَ پر کے مماس نقطہ و پر ملیں اور نقاط ن اور نَ سے مرتب پر ن م، نَ مَ عمود گرائے جائیں تو ثابت کرو کہ و م، و س، و مَ سب برابر ہیں۔

اس نتیجہ کے ذریعہ ایک بیرونی نقطہ و سے دو مماس کھینچنے کا عمل دریافت کرو۔

۴۔ اگر شلجمی کے دو مماس و ق، و قَ کھینچے جائیں اور ق قَ کا

نقطہ تنصیف ص ہو تو ثابت کرو کہ وص محور کے متوازی ہے۔

۵۔ اس لئے اگر شلجمی کے دو مماس اور ان کے نقاط تماس دئے ہوئے ہوں تو ماسکہ دریافت کرو۔

۶۔ اگر ن پر کا مماس وتر خاص ممدودہ سے ک پر اور مرتب سے ے پر ملے تو ثابت کرو کہ س ک = س ے

مشقی مثالیں مسئلہ ۶

۱۔ اگر ماسکی وتر ن ن، کے سروں پر مماس کھینچے جائیں اور وہ نقطہ ے پر ملیں اور ن م، ن، م، مرتب پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ م م، کی تنصیف ے پر ہوتی ہے، اس لئے ثابت کرو کہ اگر ن ن، کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ مرتب سے ے پر مس کریگا۔

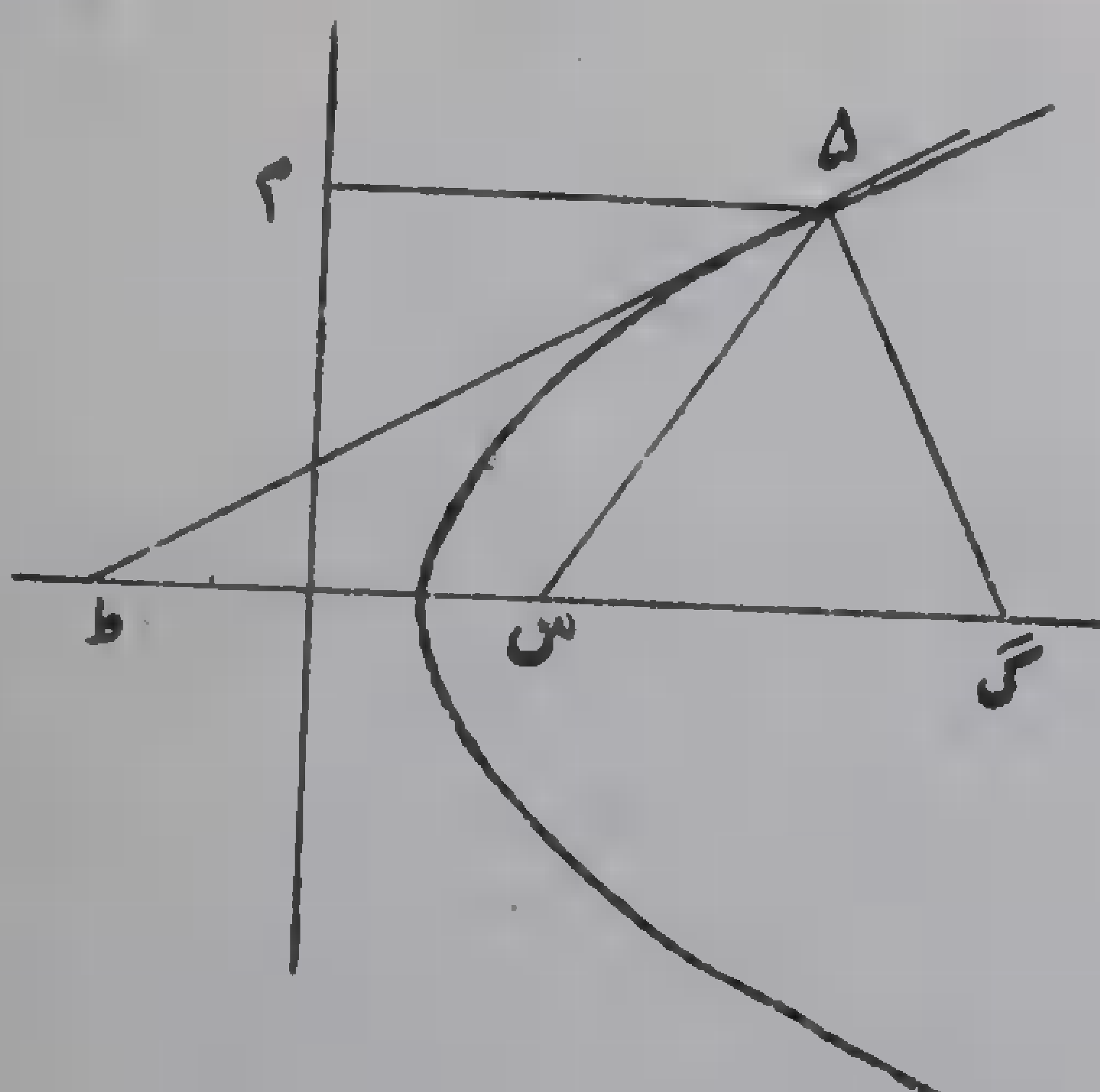
۲۔ ن س ق ایک ماسکی وتر ہے، ق پر کے مماس پر ق گ عمود ہے اور وہ محور کو نقطہ گ پر قطع کرتا ہے، ن پر کے مماس پر گ ے عمود ہے، ثابت کرو کہ ے وتر خاص پر واقع ہوتا ہے

۳۔ اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وتر خاص پر مساوی حصے کاٹتے ہیں

تعریف۔ اگر ایک منحنی کے کسی نقطہ پر مماس کھینچا جائے تو جو خط مستقیم نقطہ مذکورہ میں سے گزرے اور مماس کے ساتھ زاویہ قائمہ بنائے اس کو منحنی کے اس نقطہ پر کا **عماد** کہتے ہیں۔

مسئلہ ۷

اگر نقطہ ن پر کے مماس اور عمادِ محور کو بالترتیب نقاط ط اور گ پر ملیں تو ثابت کرو کہ س گ = س ن = س ط



مرتب پر عمود ن م کھینچو

تب ∠ س ط ن = ∠ م ن ط [اقلیدس م ۱ ش ۲۹]

= ∠ س ن ط [مسئلہ ۵]

∴ س ن = س ط

اور چونکہ ط ن گ ایک زاویہ قائمہ ہے اس لئے اگر س کو مرکز اور فاصلہ س ن یا س ط کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ گ میں سے گزرے گا۔

[اقلیدس م ۳ ش ۳۱]

∴ س گ = س ن = س ط

۱۔ ثابت کرو کہ س م اور ن ط ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہیں۔

۲۔ اگر ط، الا کا نقطہ تنصیف ہو تو ل، اس کا نقطہ تنصیف ہوگا۔

نوٹ ل میں ن ل کا نقطہ زیرین ہے

۳۔ اگر مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہو تو زاویہ ط م گ قائمہ ہوگا۔

۴۔ ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع س ن م سے کے گرد ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے اور یہ دائرہ ن گ کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے۔

۵۔ اگر اس دائرہ کا نصف قطر م سے کے برابر ہو تو مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہوگا۔

۶۔ ثابت کرو شلجمی کے کسی دو ماسوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کا نصف ہوتا ہے جو اُن کے نقاط تماس کو ملانے والے وتر کے محاذی ماسکہ پر بنے۔

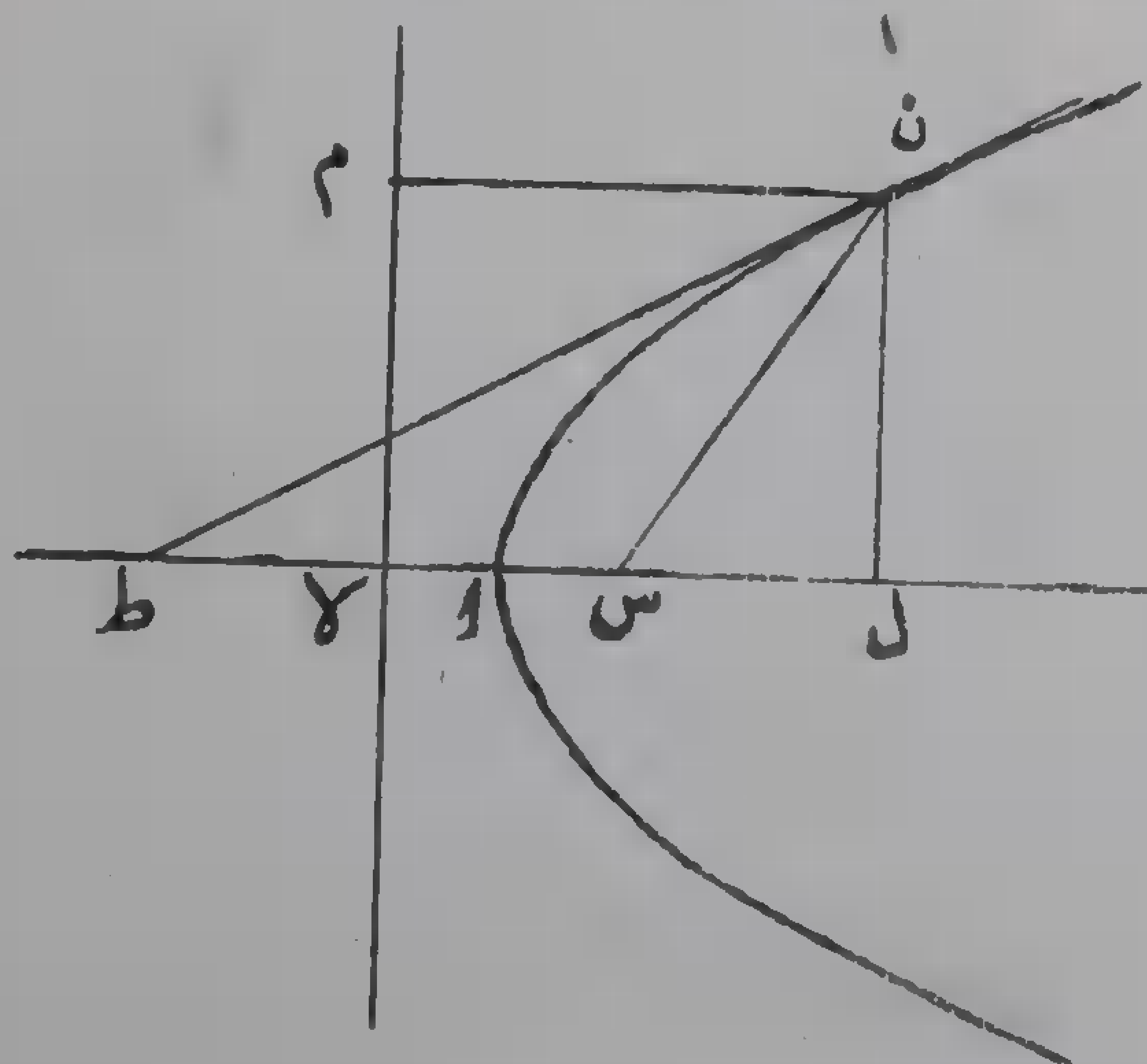
۷۔ ایک مثلث ا ب ج کا قاعدہ ا ب اور زاویہ ج دیا ہوا ہے، اُس شلجمی کے ماسکہ کا طریق دریافت کرو جو ج ا اور ج ب کو بالترتیب نقاط ا اور ب پر مس کرے۔

۸۔ دو شلجمی خطوں کا ماسکہ ایک ہی ہے اور ان کے محور ایک ہی مستقیم خط میں واقع ہیں لیکن محوروں کے رخ متقابل سمتوں میں ہیں، ثابت کرو کہ یہ شلجمی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں

تعریف۔ اگر نقطہ ن پر کا مماس محور کو ط پر ملے اور اسی نقطہ میں سے گزرنے والا معین محور کو ل پر ملے تو ل ط کو نقطہ ن پر کا زیر مماس کہتے ہیں

مسئلہ ۸

ثابت کرو کہ زیر مماس ل ط = ۲ ا ل



مرتب پر عمود ن م کھینچو

تب س ط = س ن

= ن م

= لا ل

اور ا س = ا لا

∴ ا ط = ا ل

∴ ل ط = ۲ ا ل

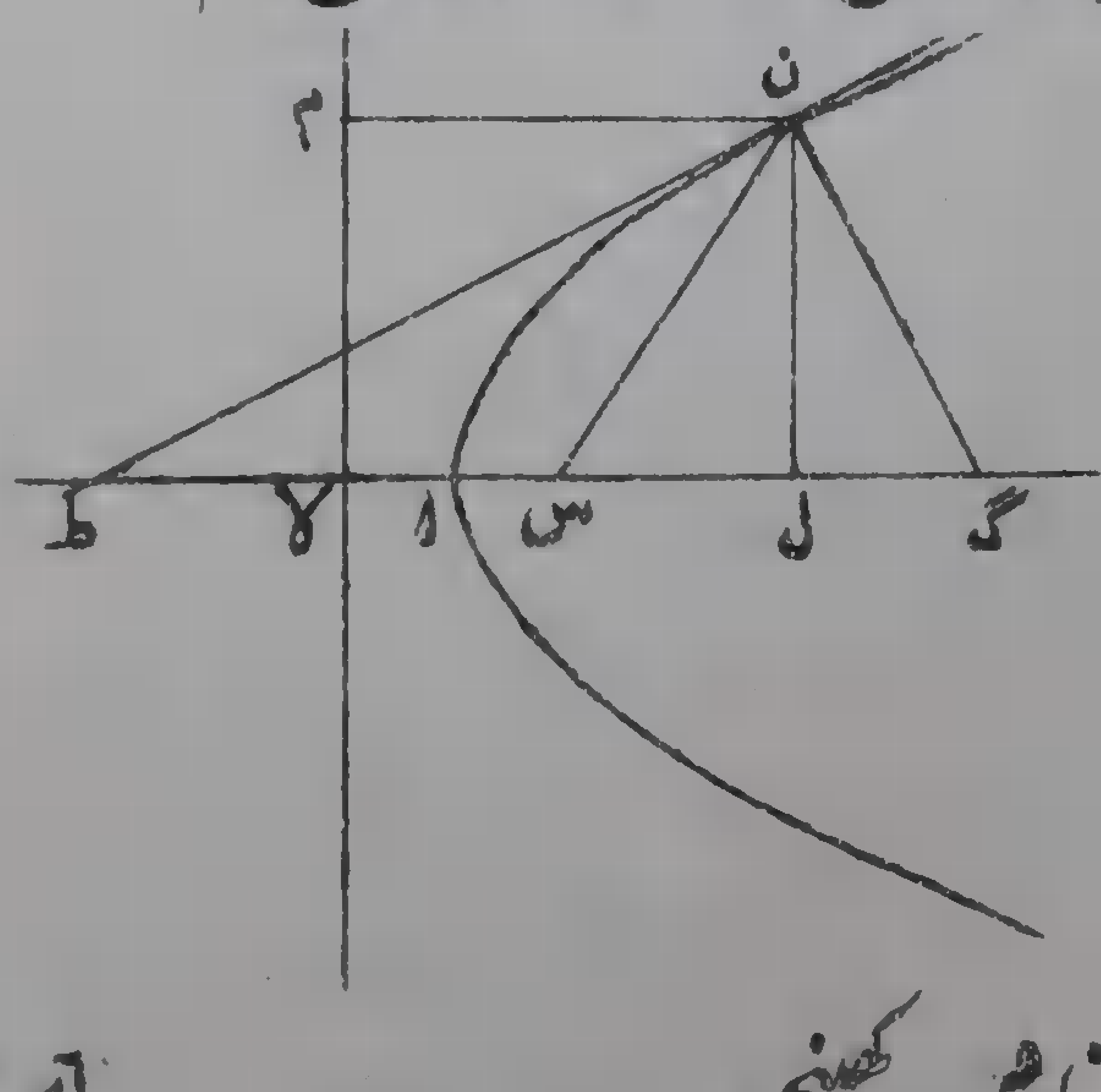
۱۔ اگر مثلث ن ل ط کے گرد ایک دائرہ کھینچا جائے اور اس کا نصف قطر س٫ ہو تو ثابت کرو کہ س٫² = س ن × ا ل

۲۔ ماسکہ س میں سے ایک خط س ق نقطہ ن پر کے مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے اور وہ ایک ایسے خط ن ع کو جو محور کے متوازی کھینچا گیا ہے ع پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ع کا طریق ایک شلجمی ہے جس کا راس س ہے اور جس کا وتر خاص اصلی شلجمی کے وتر خاص کا نصف ہے۔

تعریف۔ اگر نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر ملے اور ن میں سے گزرنے والا معین محور کو ل پر ملے تو ل گ کو نقطہ ن کا زیر عماد کہتے ہیں۔

مسئلہ ۹

زیر عماد ل گ = ۲ ا س



مرتب پر عمود ن م کھینچو

[مسئلہ

تب س گ = س ن
= ن م
= لا ل
∴ ل گ = س لا
= ۲ ا س

۱۔ اگر مثلث س ن گ متساوی الاضلاع ہو تو ثابت کرو کہ س ن = وتر خاص

۲۔ مسئلہ ۴ کو مسائل ۸ اور ۹ سے مستنبط کرو

۳۔ منحنی کے کسی نقطہ معینہ پر عماد کھینچنے کی ترکیب دریافت کرو۔

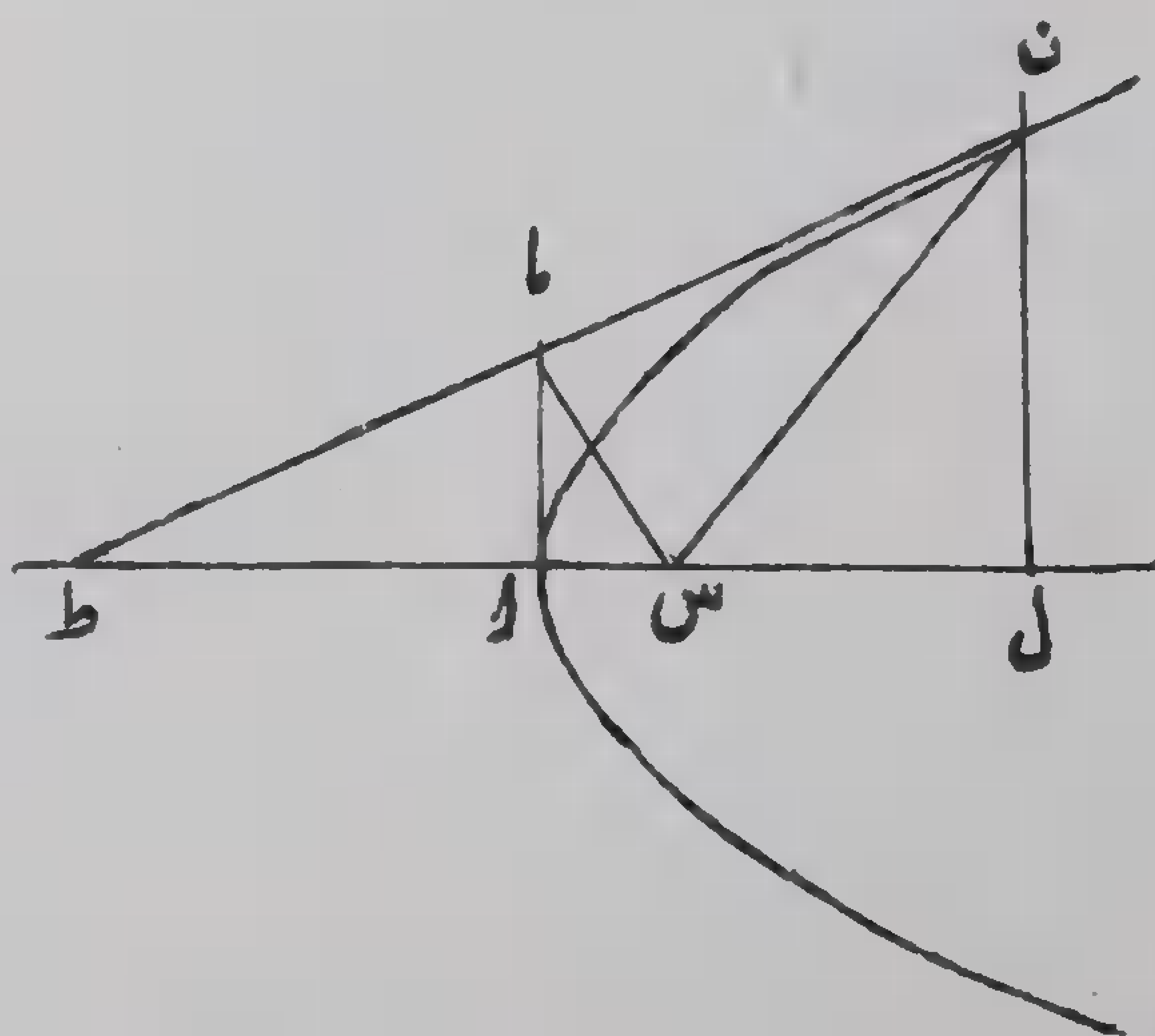
۴۔ اگر ق پر کا معین ق م زیر عماد ل گ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ق م = ن گ

۵۔ ط ن اور ط ق ایک دائرہ کے مماس ہیں، ایک ایسا شلجمی بناؤ جو ط ن کو ن پر مس کرے اور ط ق اس کا محور ہو۔

مسئلہ ۱۰

اگر شلجمی کے کسی نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے اور وہ راس پر کے مماس کو ما پر قطع کرے تو س ما، ن ط کی تنصیف کرے گا اور اس سے زاویہ قایمہ بنائے گا نیز س ما ماسکی فاصلوں س ا اور س ن کے درمیان وسط

تناسب ہوگا (س ما۲ = اس × س ن)



س ن کو ملاؤ اور محور پر عمود ن ل نکالو

اب چونکہ ط ل کی تنصیف ا پر ہوتی ہے اور اما متوازی ہے ل ن کے ما، ن ط کا نقطہ تنصیف ہے زاوئے س ما ط اور س ما ن مساوی ہیں [اقلیدس م ا ش۵]

∴ س ما، ن ط سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

نیز چونکہ مثلث س ما ط میں ما ا قاعدہ پر عمود نکالا گیا ہے

∴ س ما۲ = س ا × س ط [اقلیدس م ۶ ش ۸

= س ا × س ن [مسئلہ

۱- اگر س ن کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ راس پر کے مماس کو ما پر مس کریگا-

۲- ثابت کرو کہ ن ما × ن ہے = س ن۲

۳۔ ثابت کرو کہ ن ما × ما ہے = ا س × س ن

۴۔ ثابت کرو کہ اگر س ما کو خارج کیا جائے تو یہ مرتب کو م پر ملیگا۔

۵۔ اگر وتر خاص کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور شلجمی اور دائرہ کا مشترک مماس ن ق ہو جو ان کو نقاط ن اور ق پر بالترتیب مس کرے تو ثابت کرو کہ س ن اور س ق میں سے ہر ایک وتر خاص سے °۳۰ کا زاویہ بناتا ہے۔

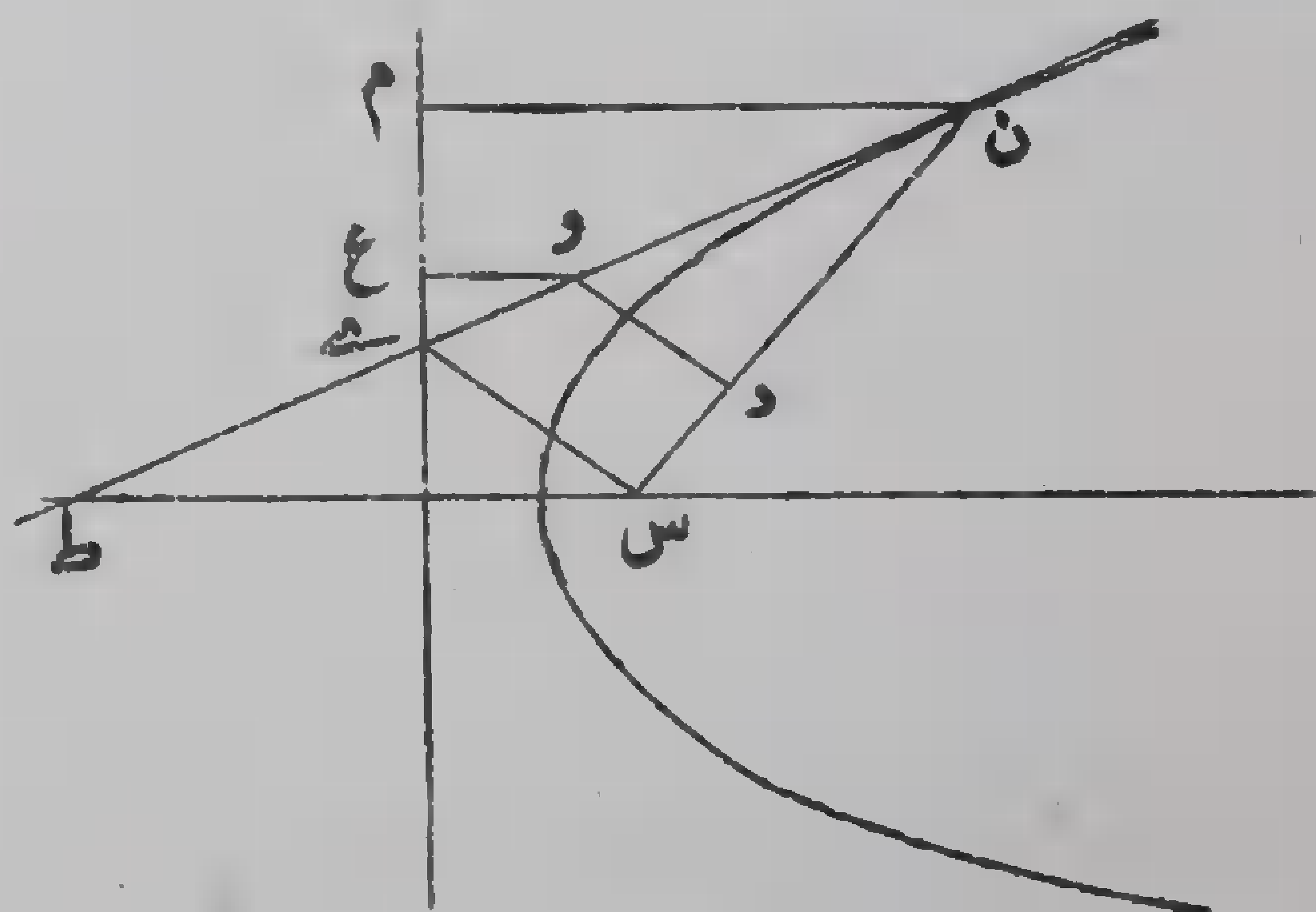
۶۔ ایک شلجمی کا ماسکہ اور دو مماس دئے ہوئے ہیں، معلوم کرو کہ راس پر کا مماس کس طرح کھینچا جائے اور اس طرح شلجمی کے محور اور مرتب کھینچنے کی ترکیبیں دریافت کرو۔

۷۔ ایک لمبے مستطیل کاغذ کو اس طرح تہ کیا جاتا ہے کہ اس کا ایک کونہ ہمیشہ مقابل کے ضلع پر واقع ہوتا ہے ثابت کرو کہ جو شکن کاغذ پر اس طرح تہ کرنے سے پڑتی ہے وہ ہمیشہ ایک ایسے شلجمی کو مس کرتی ہے جس کا مرتب مقابل کا ضلع ہو۔

مسئلہ ۱۱

شلجمی کے ایک نقطہ ن پر مماس کھینچا گیا ہے اس مماس کے ایک نقطہ و سے مرتب اور س ن پر عمود نکالے

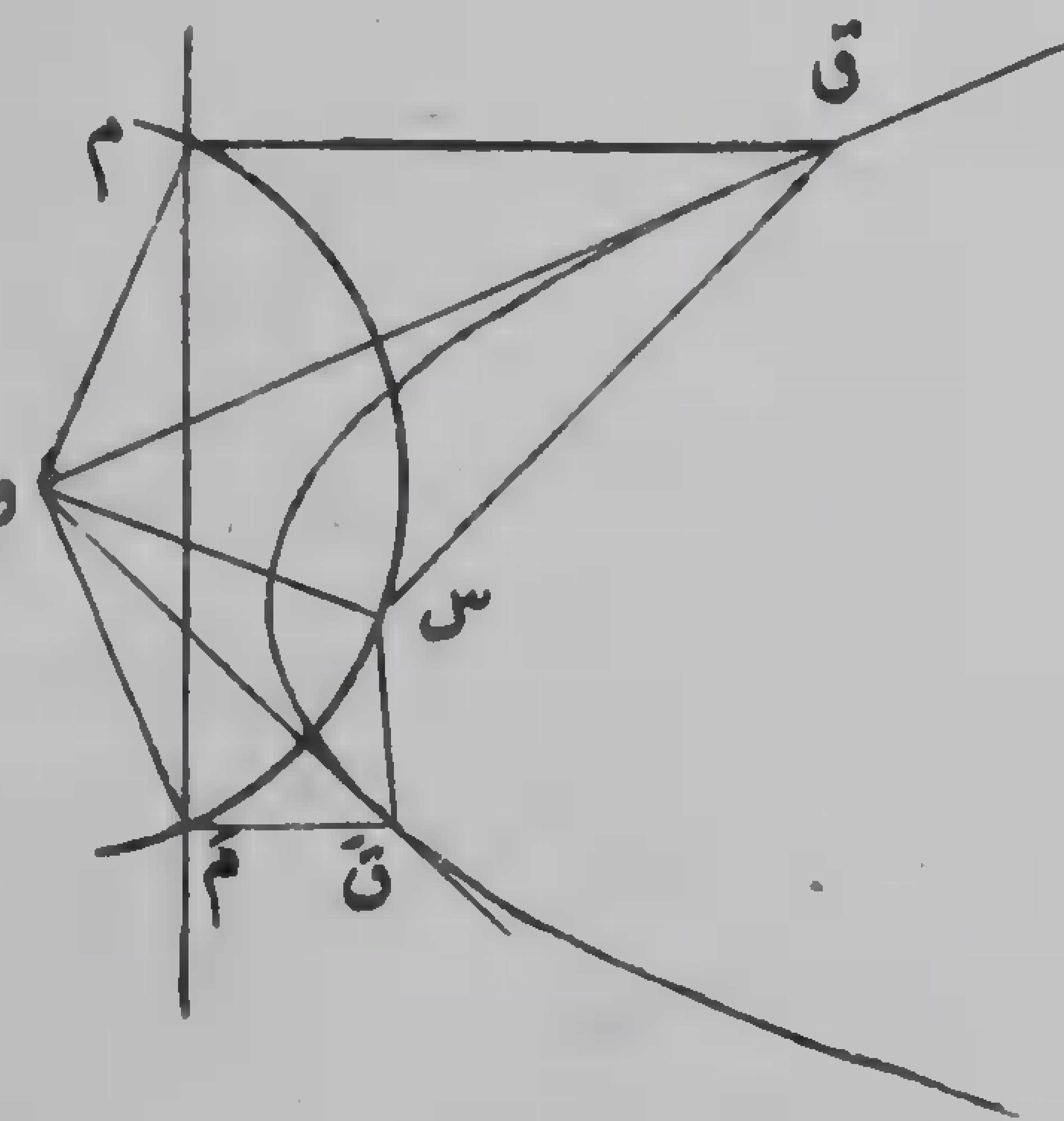
گئے ہیں اور یہ عمود بالترتیب و ع اور و د ہیں، ثابت کرو کہ
س د = و ع [شلجمی کی اس خاصیت کو آدم سے منسوب کرتے ہیں]



س ے کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م کھینچو
تب چونکہ زاویہ ے س ن قائمہ ہے
∴ ے س متوازی ہے و د کے
∴ س د : س ن = ے و : ے ن
= و ع : ن م
لیکن س ن = ن م
∴ س د = و ع

مسئلہ ۱۲

کسی نقطہ بیرونی سے شلجمی کے دو مماس کھینچو



[تحلیل - فرض کرو کہ وق اور وقَ دو مماس ہیں مرتب پر دو عمود ق م اور قَ مَ کھینچو اور وس، وم، ومَ کو ملاؤ۔

اب چونکہ وق زاویہ س ق م کی تنصیف کرتا ہے اسلیئے مثلث س ق و اور م ق و باہم مساوی ہیں (اقلیدس م اش ۴)

اور وم = وس

اسی طرح سے ومَ = وس، پس م اور مَ اس طریقہ سے معلوم ہوئے لہذا عمل مطلوب حاصل ہوا]

و کو مرکز اور وس کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو جو مرتب کو م اور مَ پر قطع کرے

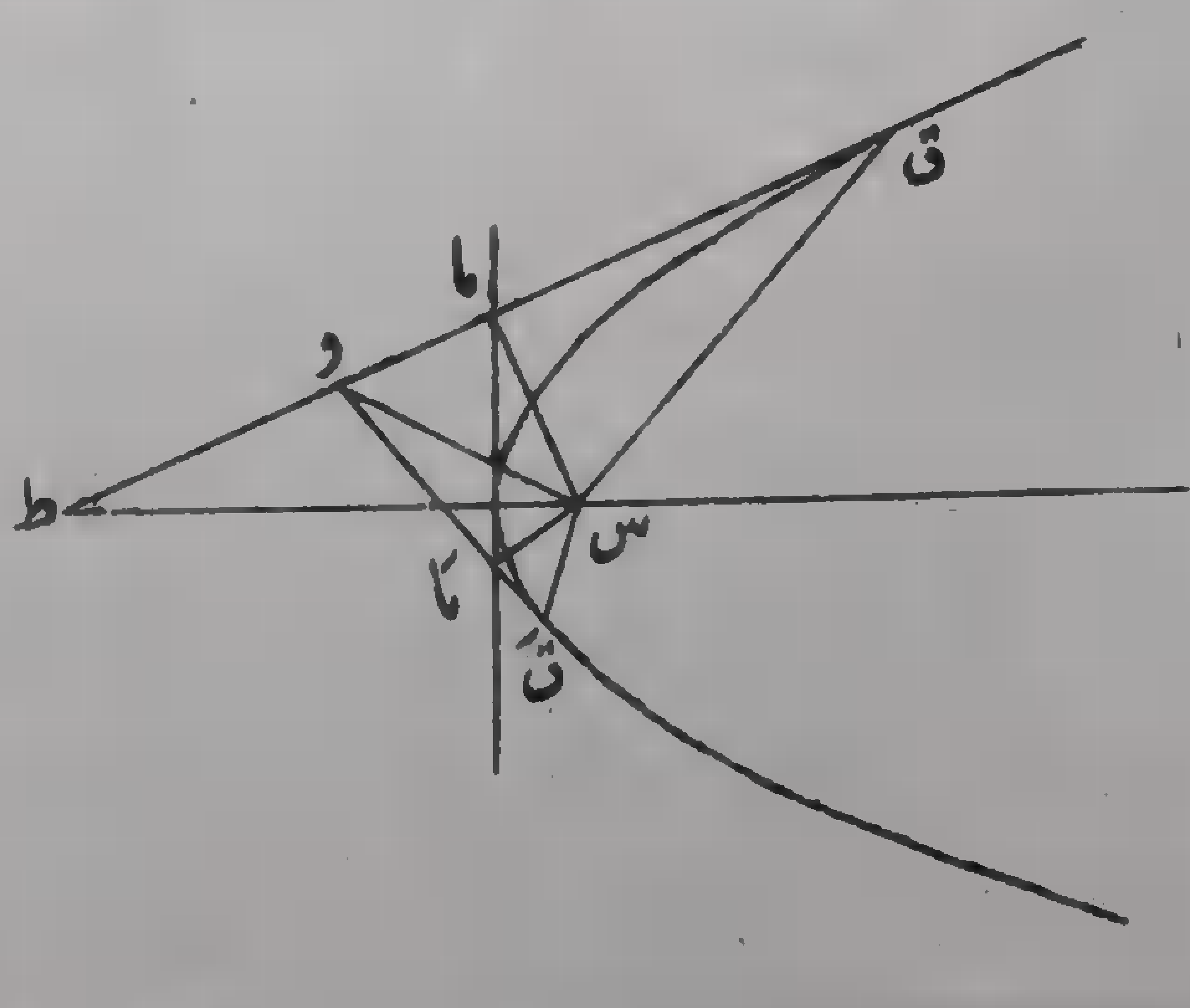
م اور مَ سے دو خط م ق اور مَ قَ کھینچو جو مرتب پر عمود ہوں اور شلجمی کو نقاط ق اور قَ پر ملیں،

وق اور وقَ کو ملاؤ، وق اور وقَ مطلوبہ مماس

ہونگے وس، وم، وم، س ق، س قَ کو ملاؤ
تب مثلثات س ق و اور م ق و میں
س ق، ق و = م ق، ق و
اور قاعدہ وم = قاعدہ و س
∴ زاویہ س ق و = زاویہ م ق و
∴ و ق نقطہ ق پر کا مماس ہے [مسئلہ ۵]
اسی طرح و قَ نقطہ قَ پر کا مماس ہے
نوٹ مسائل ۱۰ یا ۱۱ کے اصول کی بنا پر بھی عمل حاصل ہو سکتا ہے
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۶)

مسئلہ ۱۳

ثابت کرو کہ مماسات و ق اور و قَ کے محاذی ماسکہ پر مساوی زاویے بنتے ہیں۔
اور مثلثات س و ق اور س قَ و متشابہ ہیں



شلجمی کے راس پر مماس کھینچو جو وق اور وقَ سے
نقاط ما اور مَا پر ملے۔

س ق، س قَ، س ما، س مَا کو ملاؤ

ق و کو اتنا خارج کرو کہ وہ محور سے ط پر ملے
اب چونکہ ما اور مَا پر کے زاوئے قائے ہیں [مسئلہ ۱۰]
اس لئے جو دائرہ وس کے قطر پر بنایا جائے گا
وہ نقاط ما اور مَا میں سے گزرے گا۔
اس لئے زاویہ س وقَ = زاویہ س مامَا اسواسطے
کہ یہ زاوے ایک ہی قطعہ دائرہ میں واقع ہیں۔

= زاویہ س ط ما [اقلیدس م ۶ ش ۸]

= زاویہ س ق و [مسئلہ، اور اقلیدس م ا ش ۵]

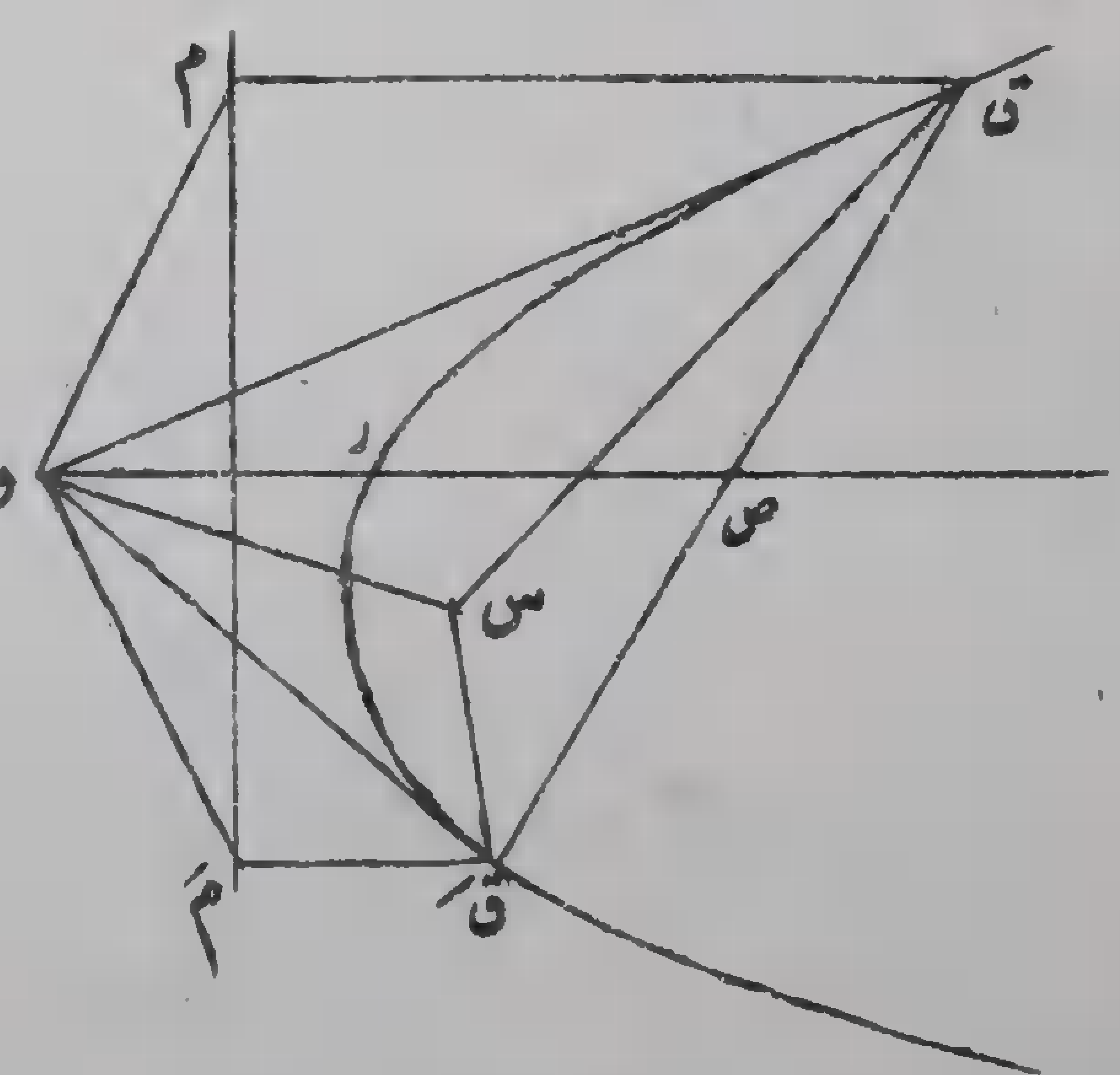
اسیطرح سے زاویہ س وق = زاویہ س قَ و
اسلیے باقی زاوے وس ق اور وس قَ آپس میں
برابر ہیں۔ اور مثلث س وق اور س قَ و متشابہ
ہیں۔

مشق۔ اگر نقطہ و میں سے ایک خط محور کے متوازی کھینچا
جائے تو یہ خط اور وس مماسوں کے ساتھ
مساوی زاوئے بنائینگے۔

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۶)

مسئلہ ۱۴

اگر مکافی کے مماسات کا ایک زوج وق اور وقَ ہو اور
محور کے متوازی خط وص کھینچا جائے جو ق قَ سے
نقطہ ص پر ملے تو ثابت کرو کہ ق قَ کی تنصیف ص
پر ہوتی ہے



فرض کرو کہ وص مرتب کو نقطہ ر پر کاٹتا ہے
ق اور قَ سے مرتب پر عمود قم اور قَمَ نکالو
وم ، ومَ ، وس ، س ق ، س قَ کو ملاؤ
تب مثلثات س ق و اور م ق و میں
س ق ، ق و = م ق ، ق و
اور زاویہ س ق و = زاویہ م ق و [مسئلہ ۵]

∴ وم = وس

اسی طرح سے ومَ = وس

∴ وم = ومَ

اور چونکہ ور مثلث متساوی الساقین وممَ کے قاعدہ پر عمود ہے اس لئے وہ قاعدہ کی تنصیف کرتا ہے

∴ مر = مَر

لیکن ق ص : ص قَ = مر : رمَ

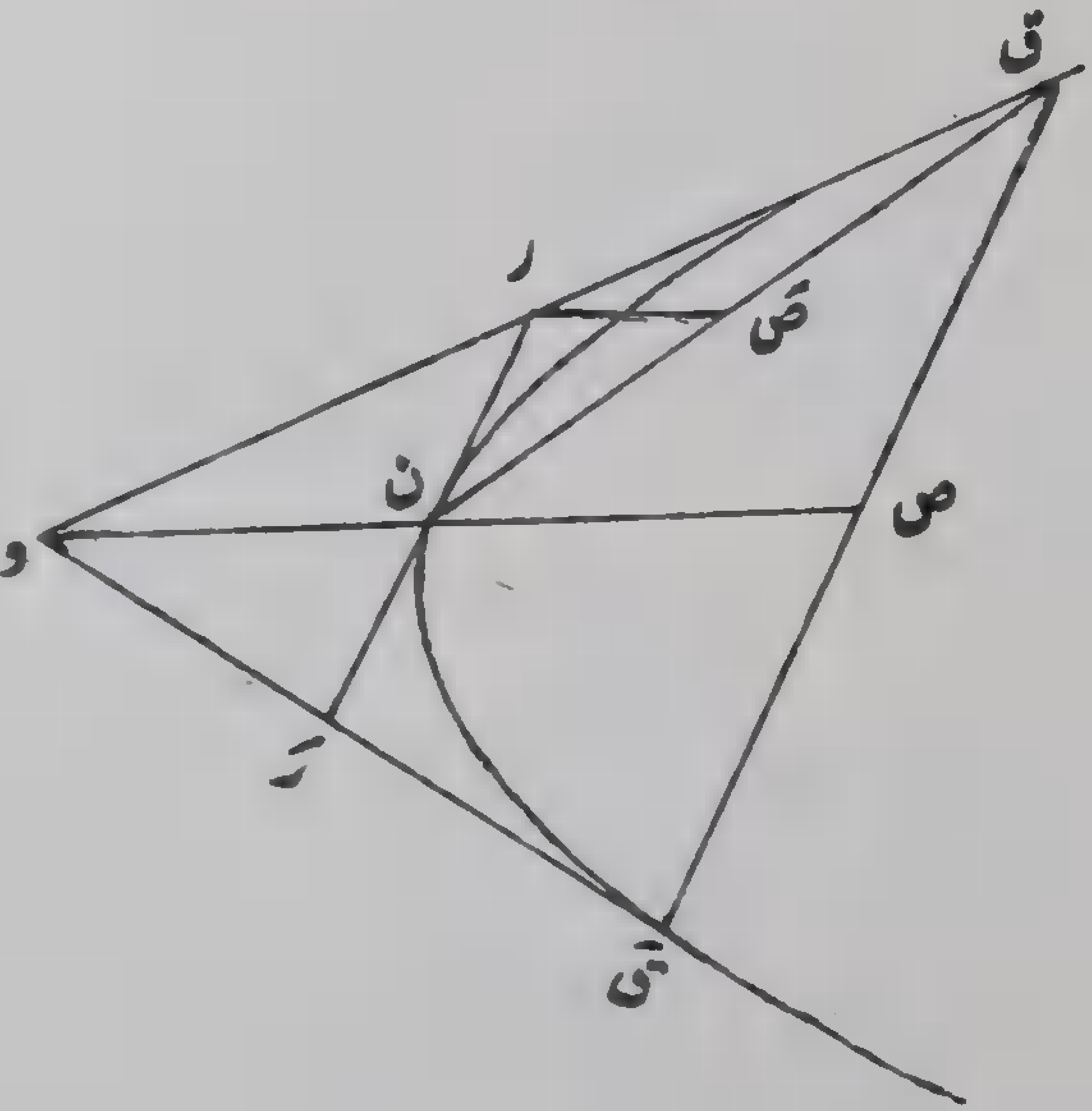
∴ ق ص = ص قَ یعنی ق قَ کی تنصیف ص پر ہوتی ہے۔

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۷)

مسئلہ ۱۵

اگر ایک مکافی کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا ہو تو ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا مستقیم خط ہوگا جو محور کے متوازی ہو اور اُس مماس کے نقطہ تماس میں سے گزرے جو وترون کے متوازی ہو۔

فرض کرو کہ مماس رن ذ وترون کے متوازی ہے



ن نقطۂ تماس ہے اور ق قَ مذکورہ وتروں میں سے ایک وتر ہے۔

نقطہ ن میں سے ایک ایسا خط و ن ص کھینچو جو ق قَ سے ص پر اور مماس ق ر و سے و پر ملے۔ ن ق کو ملاؤ اور ر صَ کو محور کے متوازی کھینچو، یہ ن ق کی تنصیف صَ پر کریگا۔ (مسئلہ ۱۴)

تب و ر = ر ق کیونکہ ر صَ، و ن کے متوازی ہے [اقلیدس م ۶ شش ۲]

اور و ن = ن ص کیونکہ ر ن، ص ق کے متوازی ہے اسی سے اگر ہم ایک مماس قَ رَ وَ ایسا کھینچیں جو و ن ص سے نقطہ وَ پر ملے تو وَ ن = ن ص اس سے معلوم ہوا کہ و اور وَ ایک دوسرے پر منطبق ہوتے

ہیں۔
چونکہ وق اور وقَ مماس ہیں اور وصَ محور کے متوازی ہے اس لئے ص وتر ق قَ کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۱۴]
اسلئے اُن تمام وتروں کے وسطی نقاط جو رن رَ کے متوازی ہیں ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہیں جو نقطہ ن ہیں سے گزرتا ہے اور محور کے متوازی ہے۔
تعریف۔ اگر کسی منحنی کے متوازی وتروں کا ایک نظام کھینچا جائے تو وتروں کے وسطی نقاط کے طریق کو قطر کہتے ہیں۔
نوٹ۔ ضروری نہیں کہ سب منحنی خطوں کے لئے یہ قطر ایک مستقیم خط ہو مگر مندرجہ بالا سے ظاہر ہے کہ مکافی کی صورت میں قطر ایک مستقیم خط ہے۔

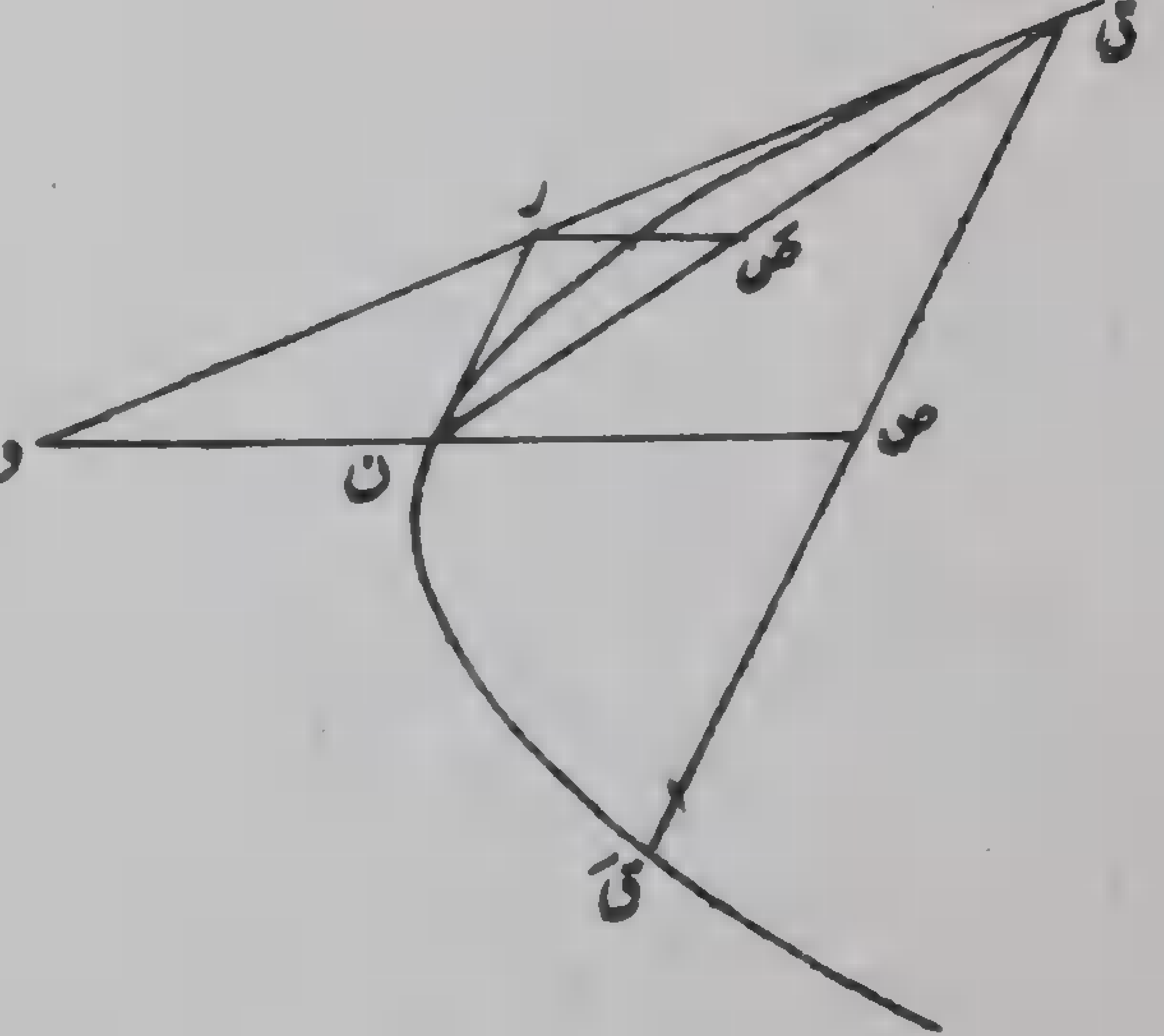
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۳۸)

تعریف۔ نصف قطر (ق ص) جو منحنی اور قطر کے درمیان واقع ہے قطر کا معین کہلاتا ہے۔

مسئلہ ۱۶

اگر قطر ن ص کا معین ق ص ہو اور ق پر کا مماس ص ن ممدودہ سے و پر ملے تو ثابت کرو کہ

و ن = ن ص



مکافی کے نقطہ ن پر مماس ن ر کھینچو جو و ق سے ر پر ملے، نقطہ ر میں سے ر ص̄ کو محور کے متوازی کھینچو۔
چونکہ ر ن اور ر ق دو مماس ہیں
اسلئے ن ق کی تنصیف ص̄ پر ہوتی ہے [مسئلہ ۱۴]
اور ن د متوازی ہے ق ص کے [مسئلہ ۱۵]

∴ و ن : ن ص = و ر : ر ق

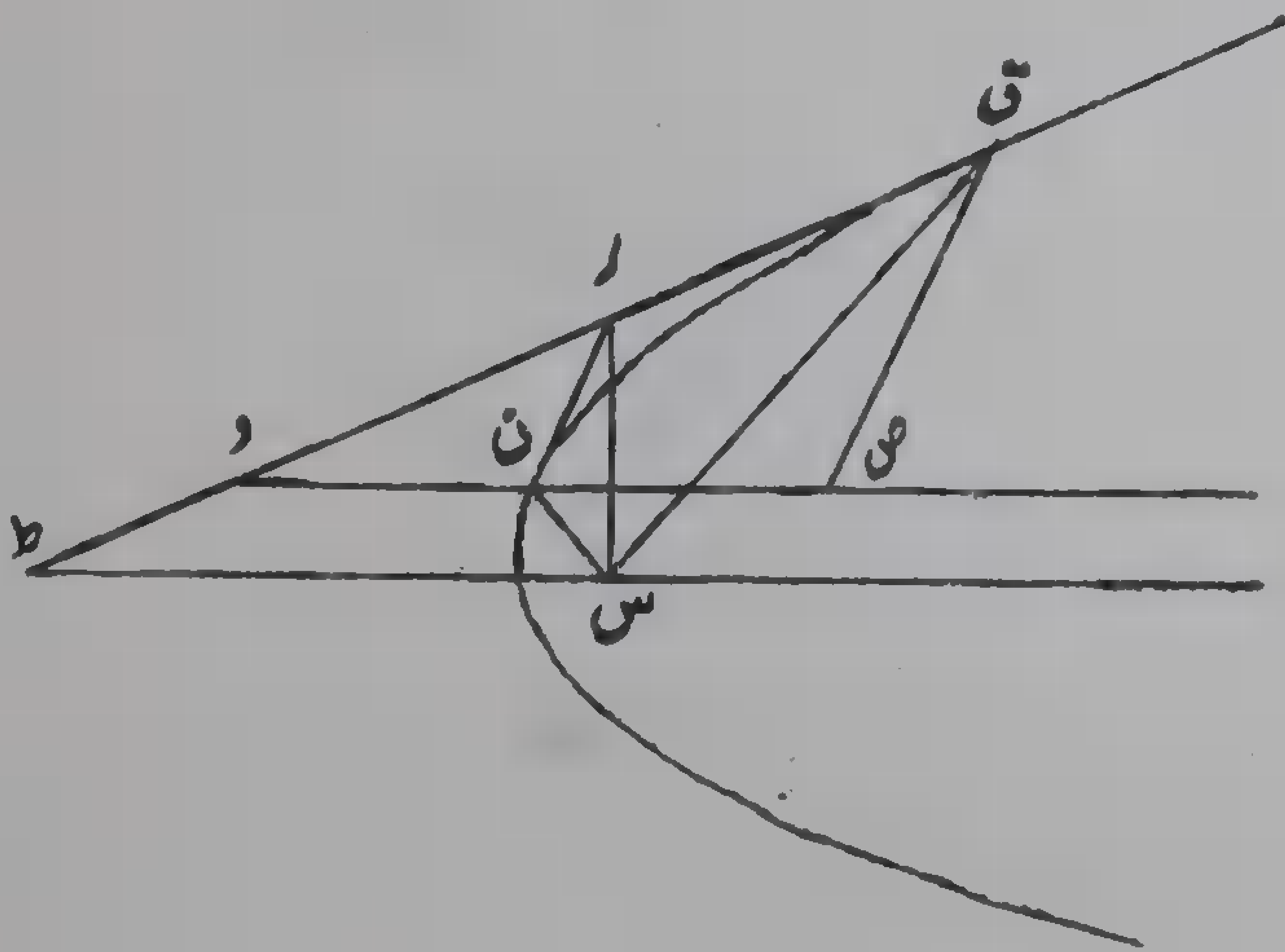
= ن ص̄ : ص̄ ق

لیکن ن ص̄ = ص̄ ق ∴ و ن = ن ص

مسئلہ ۱۷

اگر قطر ن ص کا معین ق ص ہو تو ثابت کرو کہ

ق ص^{۲} = ۴ س ن × ن ص



فرض کرو کہ قطر ن ص مکافی سے نقطہ ن پر ملتا ہے
نقطہ ق پر مماس کھینچو جو قطر سے و پر اور محور سے ط پر ملے۔

نقطہ ن پر مماس کھینچو جو و ق سے ر پر ملے
س ن، س ر، س ق کو ملاؤ
اب چونکہ ر ن، ر ق دو مماس ہیں
∴ مثلث س ر ن اور س ق ر متشابہ ہیں [مسئلہ ۱۳]
∴ زاویہ س ر ن = زاویہ س ق ر
= زاویہ س ط ر [مسئلہ ۷]
= زاویہ ن و ر [اقلیدس م ا ش ۲۹]
اور زاویہ س ن ر = زاویہ و ن ر
کیونکہ ن پر کا مماس زاویہ س ن و کی تنصیف

کرتا ہے [مسئلہ ۵]

∴ مثلث س ز ن اور ن و ز متشابہ ہیں

∴ ن ز² = س ن × ن و

اب و ص کی تنصیف ن پر ہوتی ہے (مسئلہ ۱۶)

∴ ق ص = ۲ ن ز

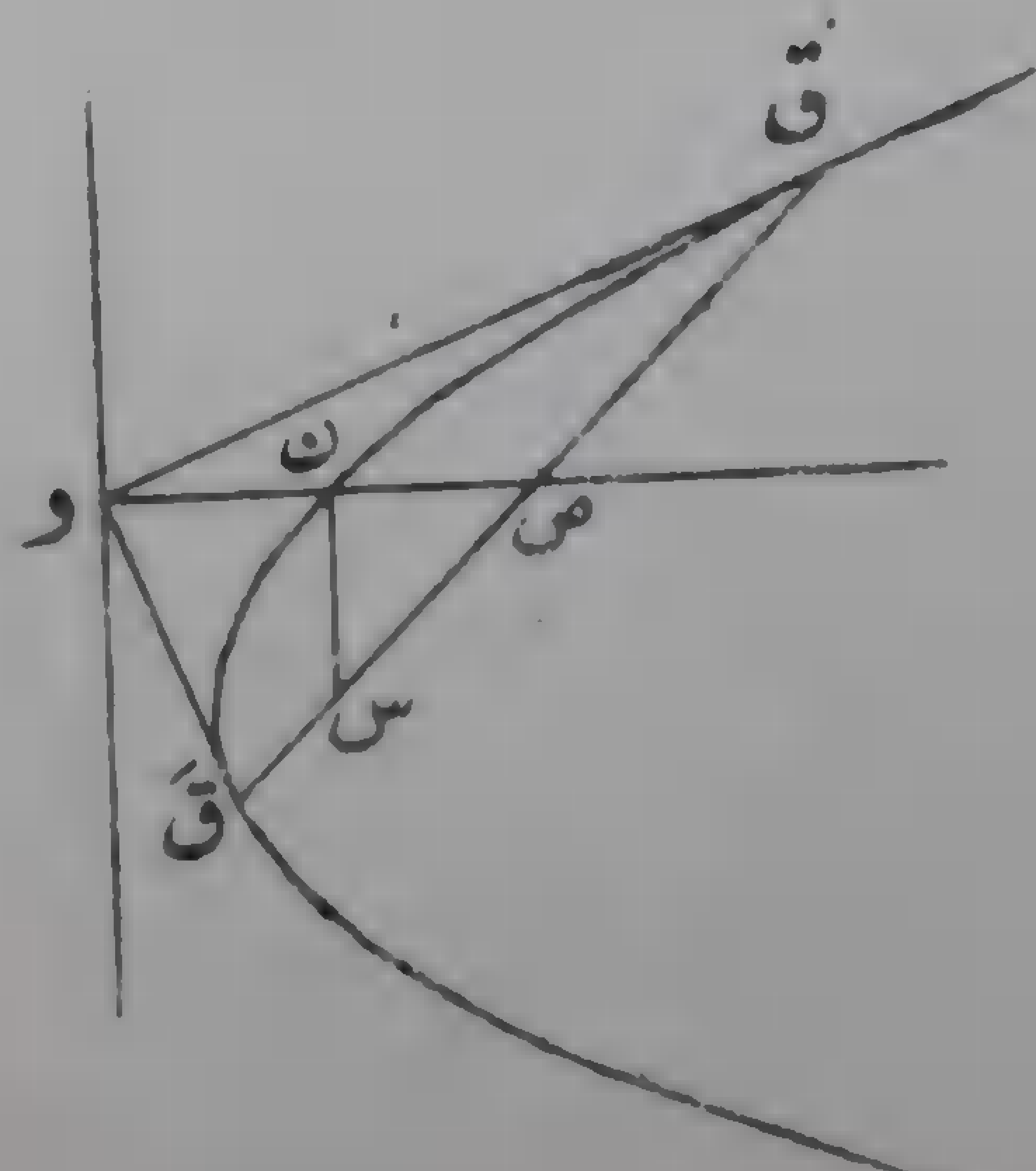
∴ ق ص² = ۴ ن ز²

= ۴ س ن × ن و = ۴ س ن × ن ص

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحات ۳۸ اور ۳۹

مسئلہ ۱۸

اگر قطر ن ص منحنی سے نقطہ ن پر ملے اور ماسکی وتر ق س قَ کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ ق قَ = ۴ س ن



مماسات وق اور وقَ کھینچو، یہ ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کریں گے اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے۔ (مسئلہ ۹)

قطر وص کھینچو اور س ن کو ملاؤ۔

اب چونکہ وص ایک مثلث قائم الزاویہ ق و قَ کے قاعدے کی تنصیف کرتا ہے۔

∴ ق ص = وص [اقلیدس م ۳ شش ۳۱]

∴ ق قَ = ۲ وص

لیکن ون = س ن [شلجمی کی تعریف سے]

∴ وص = ۲ س ن [مسئلہ ۱۶]

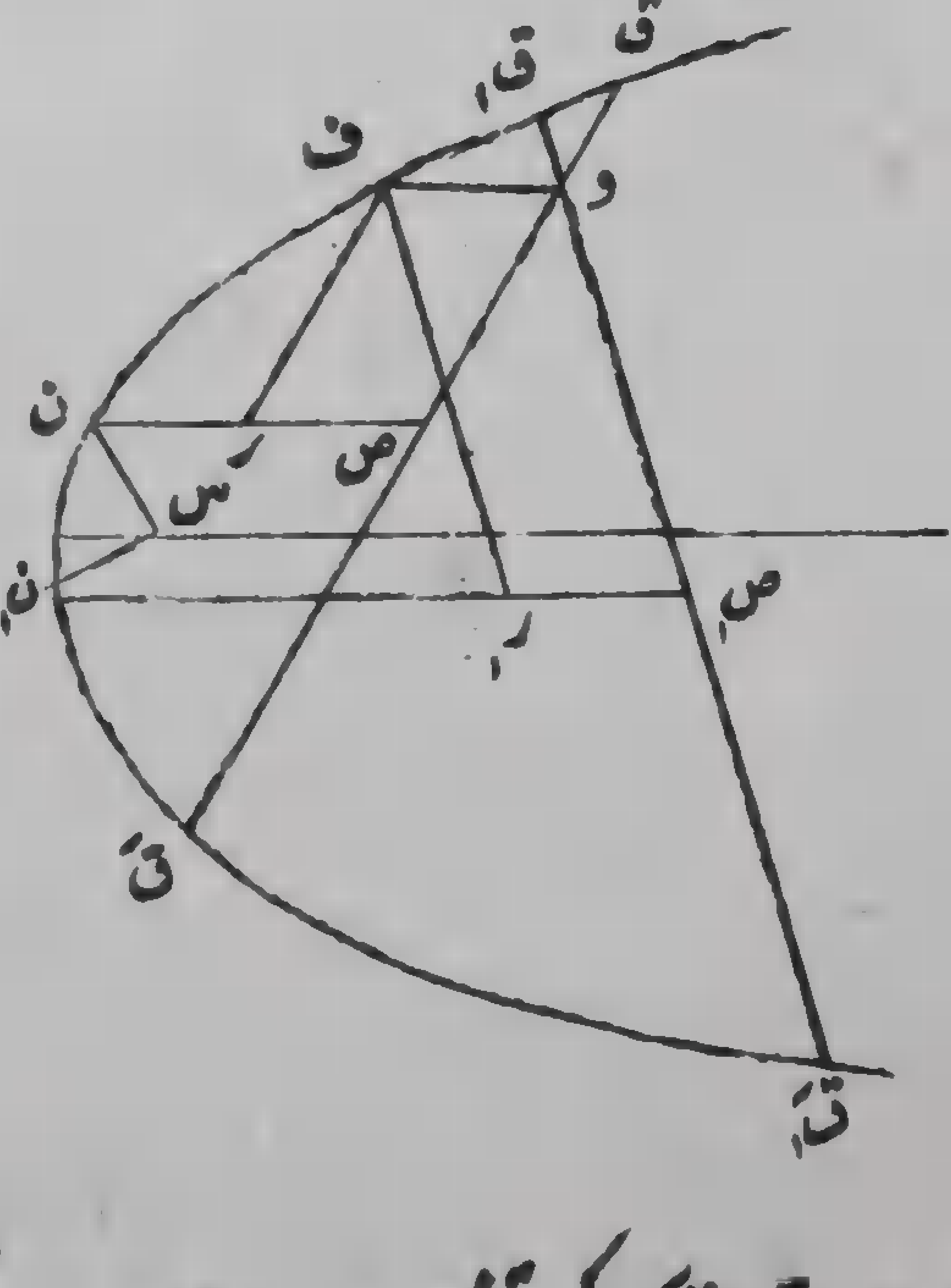
∴ ق قَ = ۴ س ن

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ ۳۹

مسئلہ ۱۹

اگر ایک شلجمی کے وتر ق قَ، ق۱ ق۱َ ایک دوسرے کو قطع کریں تو ان کے حصوں کے حاصل ضربوں کو آپس میں وہی نسبت ہوگی جو ان کے متوازی ماسکی وتروں کو آپس میں ہے

یعنی ق و × قَ و : ق۱ و × ق۱َ و = ۴ س ن : ۴ س ن۱



قطر ن ص کھینچو جو ق قَ کی تنصیف ص پر کرے و ف کو محور کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ شلجمی سے نقطہ ف پر ملتا ہے، قطر ن ص کا معین ف د کھینچو، س ن کو ملاؤ۔

تب ق و × قَ و = ق ص۲ - و ص۲ [اقلیدس م ۲ ش ۵]

= ق ص۲ - ف ز۲ [اقلیدس م ۱ ش ۴۷]

= ۴ س ن × ن ص - ۴ س ن × ن ز (مسئلہ ۲)

= ۴ س ن × ز ص

= ۴ س ن × و ف

اسی طرح سے قِ و × قَ و = ۴ س نِ × و ف

∴ ق و × قَ و : قِ و × قَ و = ۴ س ن : ۴ س نِ

مشقی مثالوں کے لیے دیکھو صفحہ ۳۹

مشقی مثالیں

مسئلہ ۱۲

۱- اگر نقطہ و مرتب پر ہو تو اس مسئلہ کے عمل سے ثابت کرو کہ مماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں

۲- اگر شکل وق س قَ متوازی الاضلاع ہو تو نقطہ و کا مقام دریافت کرو۔

مسئلہ ۱۳

۱- اگر شلجمی کا ایک تیسرا مماس کھینچا جائے جو وق اور وقَ سے

نقاط ر اور ط پر ملے تو ثابت کرو کہ مثلث و ر ط کے گرد جو دائرہ کھینچا جائے گا وہ س سے گزریگا

۲- ایک شلجمی تین مستقیم خطوں کو مس کرتا ہے، اس کے ماسکہ کا طریق دریافت کرو۔

۳- چار مستقیم خطوں کے مقام معلوم ہیں اور ایک شلجمی ان میں سے ہر ایک کو مس کرتا ہے، ہندسی عمل کے ذریعہ سے اس کا ماسکہ دریافت کرو،

۴- ثابت کرو کہ وق اور وقَ کے درمیان و س وسط متناسب ہے پہلا کونسا مسئلہ اس کی خاص صورت ہے؟

۵- ایک شلجمی کے دو مماس اور ان میں سے ایک کا نقطہ تماس معلوم ہے، ثابت کرو کہ ماسکہ کا طریق ایک ایسا دائرہ ہے جو مذکورہ نقطہ تماس اور مماسات کے نقطہ تقاطع میں سے گزرتا ہے اور ایک مماس کو مس کرتا ہے۔

۶- اگر مماسات وق اور وقَ کے درمیانی زاویہ ق و قَ کا منصّف محور سے ر پر ملے تو ثابت کرو س و = س ر

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

۱- اگر ایک ماسکی وتر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ وہ مرتب کو مس کریگا۔

۲- ثابت کرو کہ ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے عماد ایک دوسرے کو اس قطر پر قطع کرتے ہیں جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔

۳- دو مماس اور انکے نقاط تماس دیے ہوئے ہیں ماسکہ اور مرتب

دریافت کرو۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۵

۱۔ شلجمی کے متوازی وتروں کا ایک سلسلہ معلوم ہے، ثابت کرو کہ ہر ایک وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو ایک ہی مستقیم خط پر قطع کرتے ہیں۔

۲۔ ایک شلجمی کا خاکہ کاغذ پر کھینچا گیا ہے، اس کا محور اور مرتب دریافت کرو۔

۳۔ اگر وتر محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائیں تو ان کے وسطی نقاط میں گزرنے والا خط وتر خاص کے ایک سرے میں سے گزرے گا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۷

۱۔ اگر وص پر عمود ق د کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ق د۲ = ۴ ا س × ن ص

۲۔ ن پر کا قطر ط ن ص ہے اور ق پر کا معین ق ص اور ق پر کا مماس ق ط ہے، اگر ق ص = ط ص تو ثابت کرو کہ ط مرتب پر واقع ہے۔

۳۔ نقطہ ص میں سے کوئی وتر ل ص لَ کھینچا گیا ہے اور قطر

ن ص کے معین ل م، لَ مَ نقاط ل اور لَ سے کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ل م × لَ مَ = ق ص۲

۴۔ شلجمی کے کسی مماس کے نقطہ تماس میں سے ایک وتر کھینچا گیا ہے اگر محور کے متوازی ایک اور خط کھینچا جائے جو مماس، منحنی اور وتر سے تین نقطوں پر ملے تو ثابت کرو کہ یہ نقطے خط کو ایسے دو حصوں میں تقسیم کریں گے جن کی باہمی نسبت وہی ہوگی جو وتر کے دو حصوں کی ہے۔

۵۔ ایک نقطہ معلومہ میں سے شلجمی کا ایک ایسا وتر کھینچو جو اس نقطہ پر ایک نسبت معلومہ میں تقسیم ہو جائے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۸

۱۔ ایک ماسکی وتر ن س ق ایسا کھینچو کہ س ن = ۳ س ق

۲۔ اگر ایک قطر مرتب سے نقطہ د پر ملے تو د س اُن سب وتروں پر عمود ہوگا جن کی قطر تنصیف کرتا ہے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۹

۱۔ شلجمی کا ماسکہ کسی ماسکی وتر کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ثابت کرو کہ ان دو حصوں کا اوسط موسیقی نصف وتر خاص کے برابر ہے۔

۲ - اگر قطر ن ص کا معین ق ص ہو اور ن ق کا مزدوج قطر ن ص۱ موجون ق سے ص۱ پر ملے تو ثابت کرو کہ

ن ص۱ = $\frac{۱}{۴}$ ن ص

قائم تظلیل

تعریفات ۱- اگر کسی نقطہ سے ایک ثابت سطح پر عمود نکالا جائے تو عمود کے پائیں کو اُس **نقطہ کا ظلّ** کہتے ہیں اور ثابت سطح کو **سطح تظلیل** کہتے ہیں

۲- ایک مستقیم یا منحنی **خط کا ظلّ** اُس کے نقطوں کے ظلوں کا مجموعہ ہوتا ہے، یعنی اگر خط مذکور کے سب نقطوں سے سطح تظلیل پر عمود نکالے جائیں تو عمودوں کے نقاط زیرین کا جو طریق ہوگا اُس کو اس خط کا ظلّ کہینگے۔

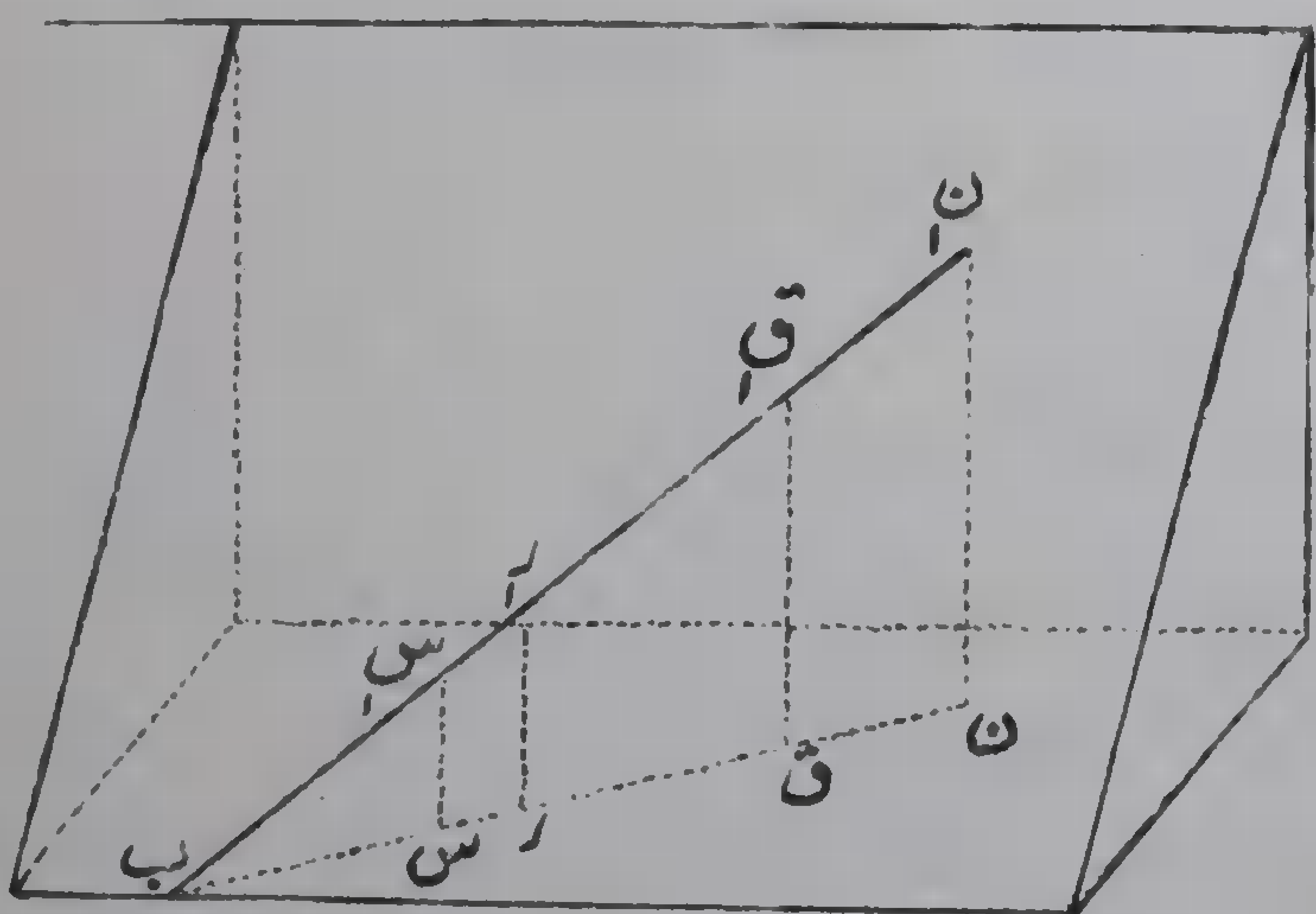
۳- اگر ایک خط یا ایک سے زیادہ خطوط کسی دئے ہوئے رقبہ کا احاطہ کریں تو اس **رقبہ کا ظلّ** وہ رقبہ ہوگا جو اُس خط یا خطوط کے ظلوں سے گھرا ہوا ہو۔

۴- اگر ایک دیا ہوا منحنی کسی خاص سطح پر واقع ہو اور وہ سطح، سطح تظلیل کو ایک مستقیم خط پر قطع

کرے تو اس خط کو ہم **بنیادی خط** کہینگے۔

مسئلہ ۱

ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط کا ظِلّ ایک مستقیم خط ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ن۱ ق۱ ر۱ س۱ ب دیا ہوا مستقیم خط ہے جو بنیادی خط کو نقطہ ب پر ملتا ہے۔ اور فرض کرو کہ ن۱، ق۱، ر۱، س۱ کے ظِلّ بالترتیب ن، ق، ر، س ہیں۔

(بحکم اقلیدس م ۱۱ ش ۶ اور ۷) عمود ن۱ن، ق۱ق، ر۱ر، س۱س ایک سطح مستوی ن۱ن ب میں واقع ہوتے ہیں اور یہ سطح، سطح تظلیل کو مستقیم خط ب ن پر قطع کرتی ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۳)

اس سے معلوم ہوا کہ ب ن، کا ظل ایک مستقیم خط ب ن ہے اور یہ دونوں خط ایک دوسرے کو ایک نقطہ ب پر قطع کرتے ہیں جو بنیادی خط پر واقع ہے۔

مسئلہ ب

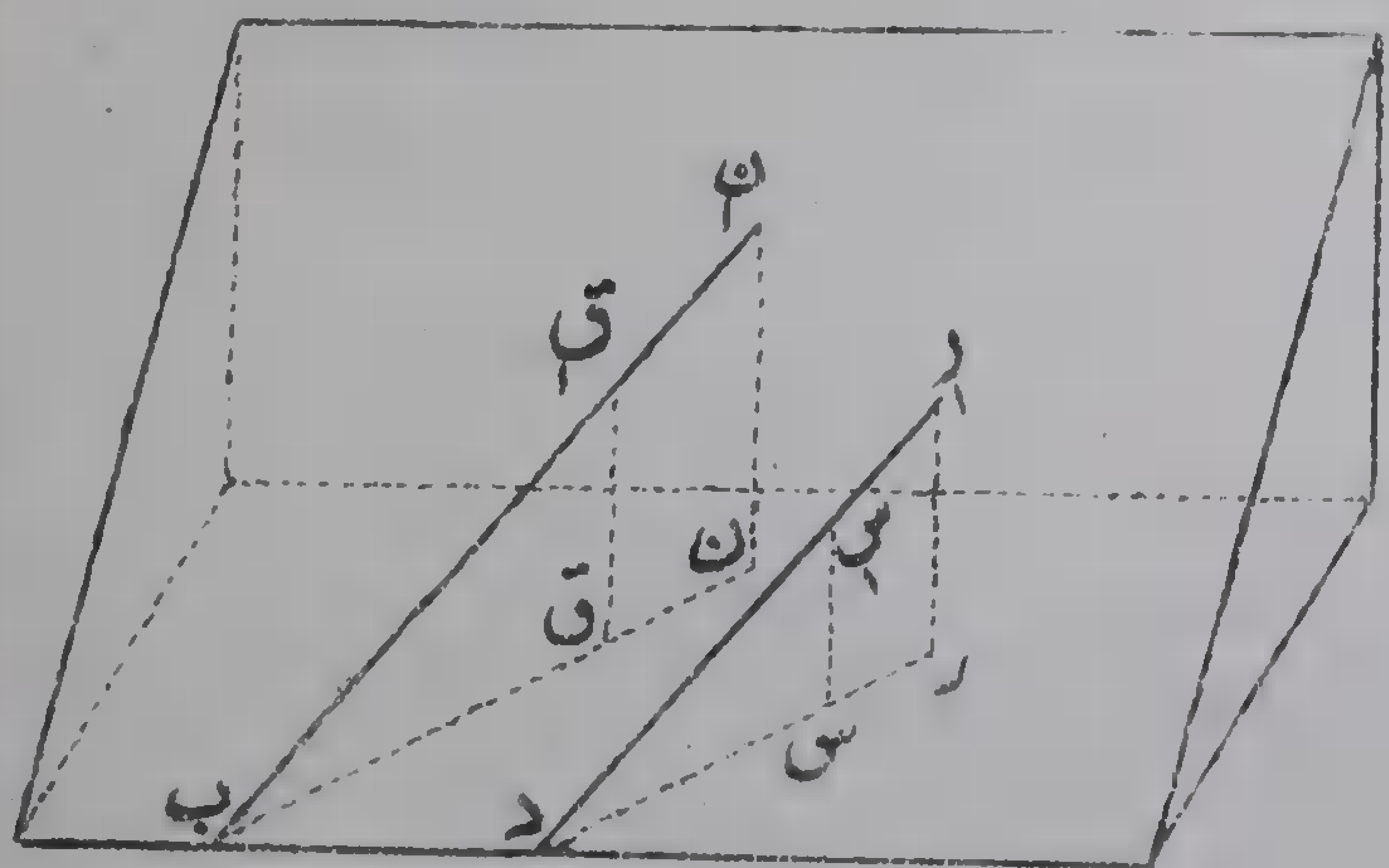
ایک محدود مستقیم خط کے حصوں کی نسبت تظلیل سے نہیں بدلتی۔

فرض کرو کہ ن، ق، ر، س، ب ایک دیا ہوا مستقیم خط ہے اور ن ق ر س ب اس کا ظل ہے۔ ن، ن، ق، ق، ر، ر، س، س سب متوازی ہیں کیونکہ وہ سب کے سب ایک ہی سطح مستوی ن ب ن، میں واقع ہیں اور سطح تظلیل پر عمود ہیں۔ پس معلوم ہوا کہ حصوں ن ق، ق ر، ر س کی آپس میں وہی نسبت ہے جو ن، ق، ق، ر، ر، س، کو آپس میں ہے (اقلیدس م ۶ شش ۲)

مسئلہ ج

ثابت کرو کہ متوازی اور مستقیم خطوں کے ظلّ متوازی اور مستقیم خط ہوتے ہیں اور تظلیل کے بعد ان کے

طولوں کی باہمی نسبت وہی رہتی ہے جو پہلے تھی۔



فرض کرو کہ ن ق ب اور ر س د دو متوازی اور اور مستقیم خط ہیں جو بنیادی خط کو نقاط ب اور د پر ملتے ہیں اور فرض کرو کہ ن ق ب اور ر س د ان کے ظل ہیں۔

ن ن متوازی ہے ر ر کے [اقلیدس م ۱۱ ش ۶]

ن ق متوازی ہے ر س کے [مفروض

∴ سطح ب ن ن متوازی ہے سطح د ر ر کے [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۵]

اسلئے ن ق ب متوازی ہے ر س د کے [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۶]

نیز مثلثات ن ب ن اور ر د ر متساوی الزوایا ہیں [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۰]

∴ ن ق : ن ق = ن ب : ن ب

= ر د : ر د

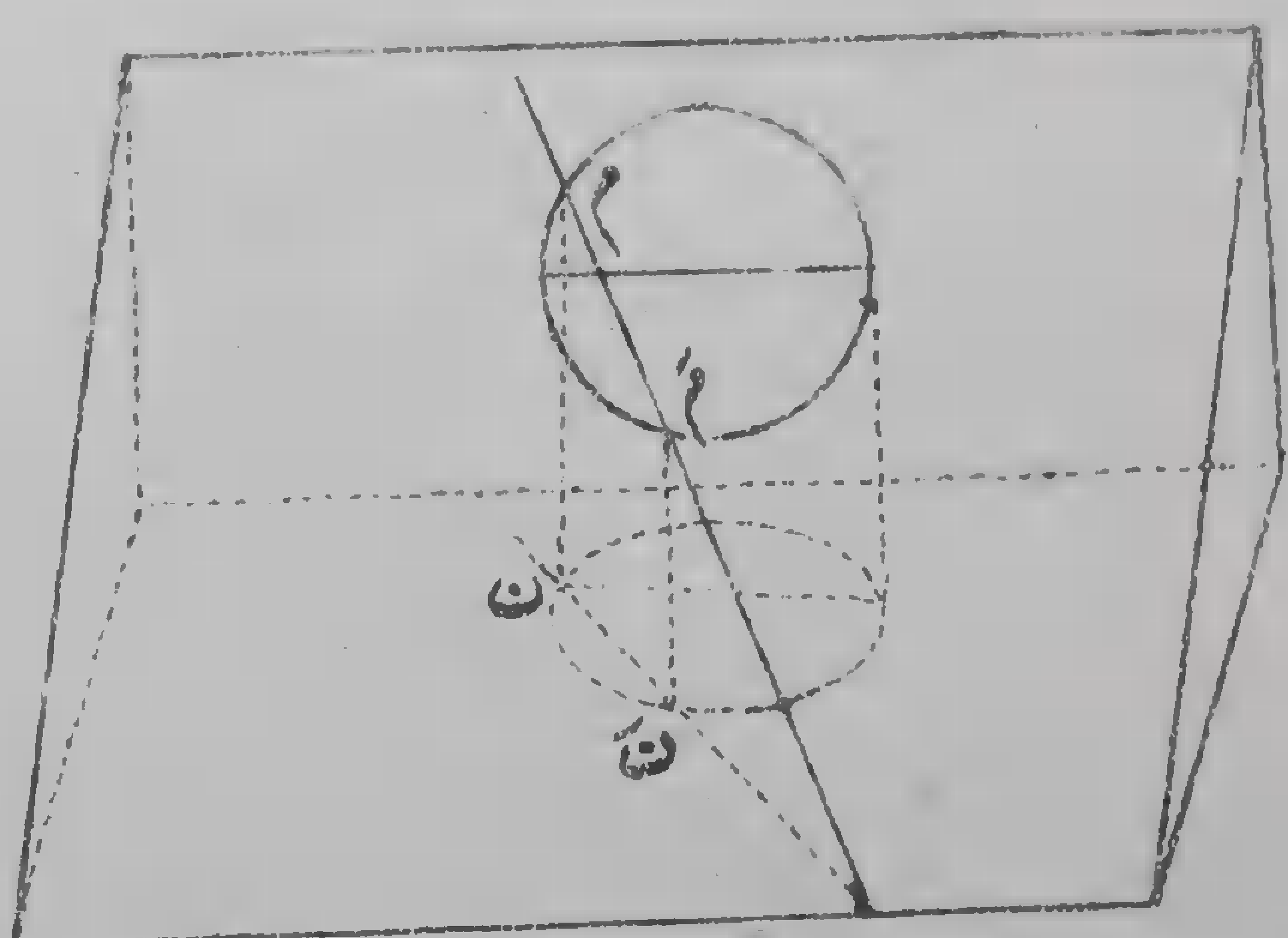
= رس : رس١

اسلئے ن ق : رس = ن١ ق١ : رس١

مشاہدہ۔ نسبت ن ب : ن١ ب = جم ن١ ب ن

مسئلہ د

ثابت کرو کہ کسی منحنی کے مماس کا ظل اُس منحنی کے ظل کا مماس ہوتا ہے یا اختصاراً مماس کا ظل مماس ہوتا ہے اور یہ دونوں مماس بنیادی خط سے ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں



فرض کرو کہ کسی منحنی پر دو نقطے م اور م١ ایک دوسرے کے قریب ہیں، ظاہر ہے کہ ان نقطوں کے ظل ن اور ن١ اس منحنی کے ظل پر واقع ہوں گے۔
فرض کرو کہ م١ حرکت کرکے م کے اتنا قریب آجاتا ہے

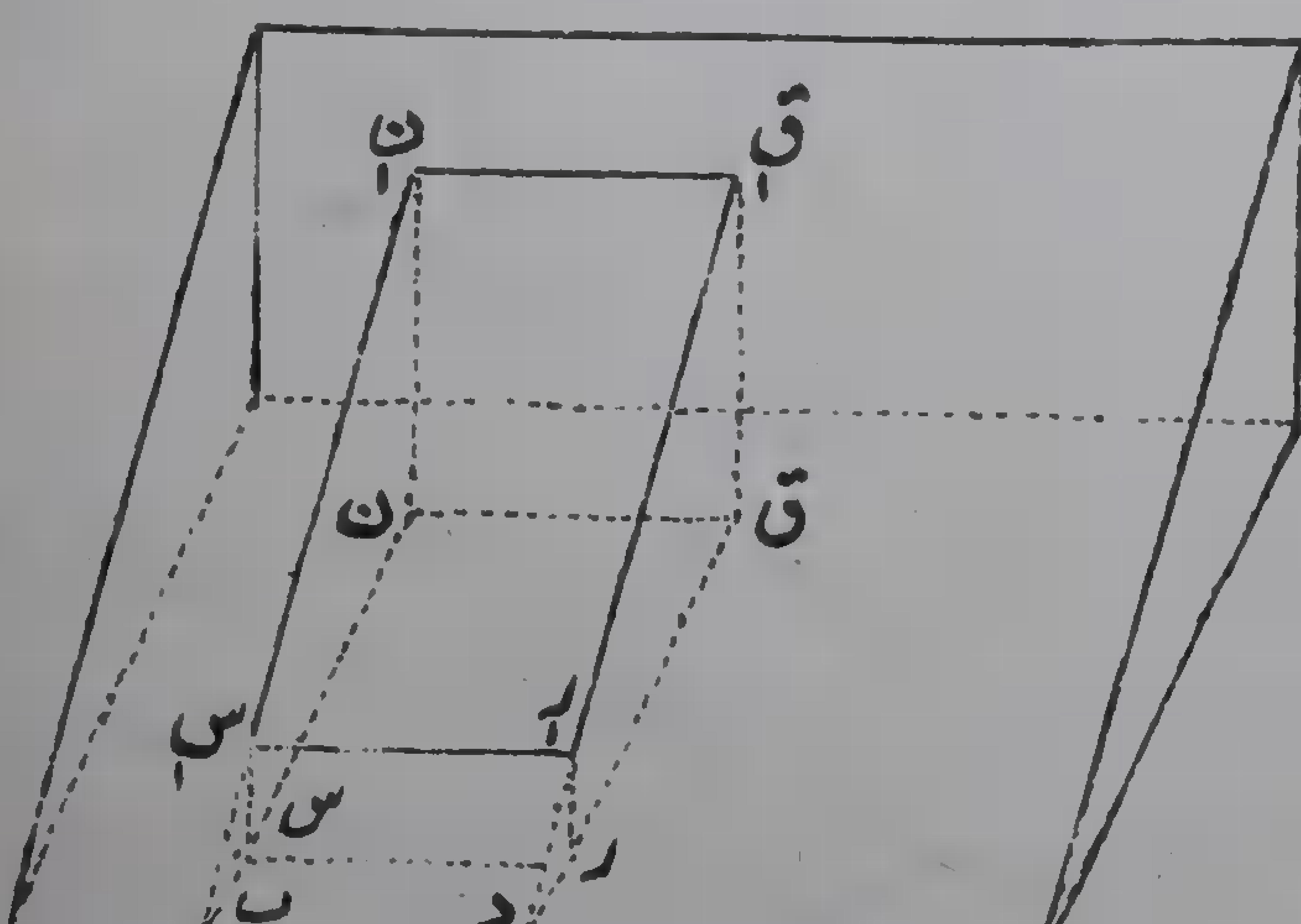
کہ آخرالامر اس پر منطبق ہو جاتا ہے یعنی م مَ منحنی کا مماس بن جاتا ہے

جب ایسا ہوتا ہے تو نَ حرکت کر کے ن کے اتنا قریب آجاتا ہے کہ آخر کار وہ اس پر منطبق ہوجاتا ہے اور ن نَ منحنی معلوم کے ظل کا مماس بن جاتا ہے

نیز ظاہر ہے کہ یہ مستقیم خط بنیادی خط کو ایک ہی نقطہ پر قطع کرتے ہیں (مسئلہ ۱)

مسئلہ ۲

ثابت کرو کہ رقبوں کی نسبت تظلیل سے نہیں بدلتی



صورت اول فرض کرو کہ ن۱ ق۱ ر۱ س۱ ایک مستطیل ہے

جس کے دو اضلاع ن ق' اور ر' س' بنیادی خط کے متوازی ہیں اور فرض کرو کہ ن ق ر س اس کا ظل ہے، ن س' اور ق' ر' کو اتنا خارج کرو کہ وہ بنیادی خط کو بالترتیب نقاط ب اور د پر ملیں

رقبہ ن ق ر س : رقبہ ن ق' ر' س' = ن ق × ن س : ن ق × ن س'

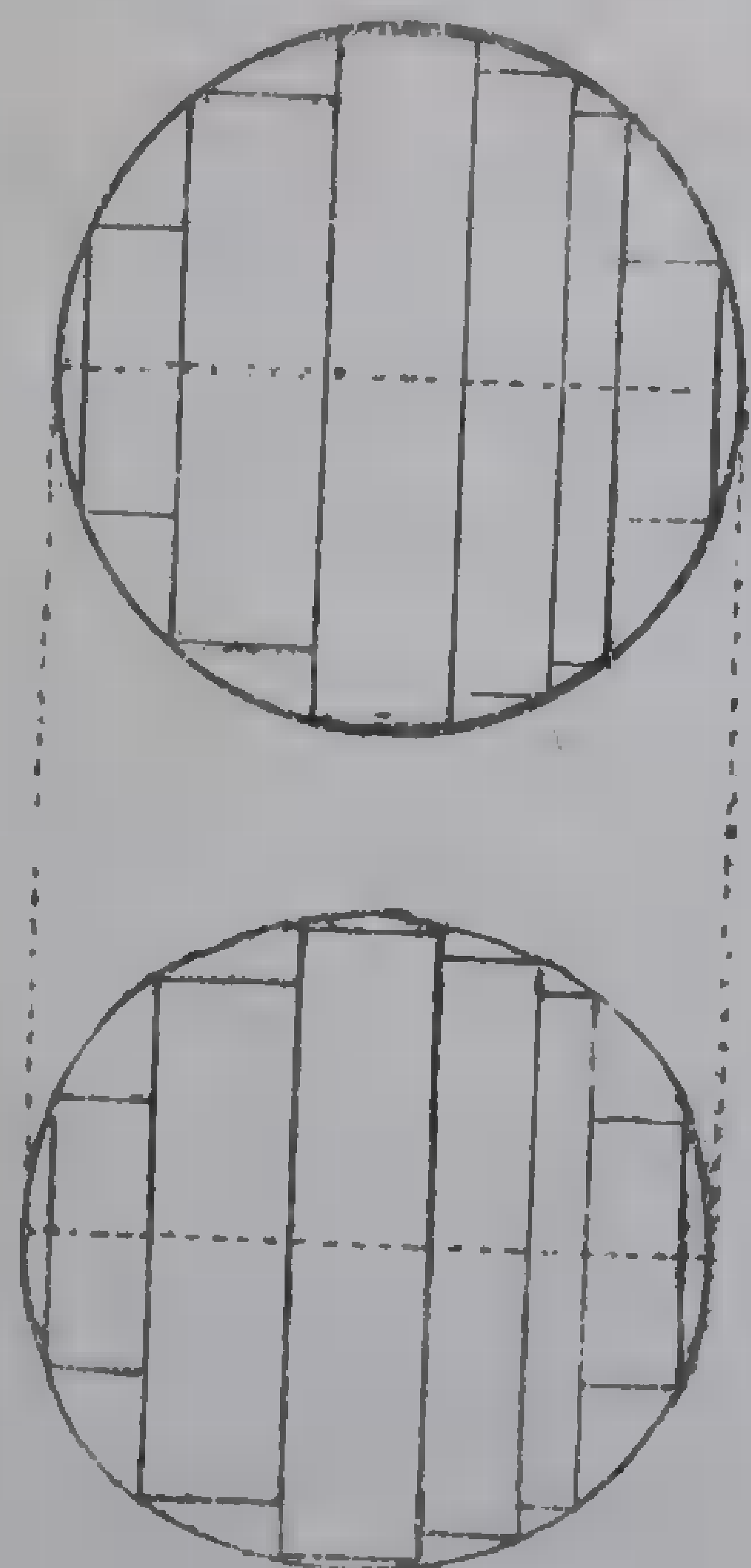
= ن س : ن س'

= ن ب : ن ب'

اب اس نسبت کی قیمت مستطیل کے طول اور عرض پر منحصر نہیں ہے (کیونکہ یہ جم عہ کے برابر ہے جہاں اصلی سطح اور سطح تظلیل کا درمیانی زاویہ عہ ہے) پس معلوم ہوا کہ تظلیس سے ایسے تمام مستطیلوں کا رقبہ ایک ہی نسبت سے کم ہوتا ہے اور اگر اصلی سطح میں کئی ایک ایسے مستطیل ہوں تو ان کی باہمی نسبت وہی ہوگی جو اِن کے ظلوں کی ہے۔

صورت دوم فرض کرو کہ ہمیں کوئی ہندسی شکل دی ہوئی ہے، خواہ یہ کسی طرح کی ہو ہم اس کے اندر ایسے متوازی خط کھینچ سکتے ہیں جو بنیادی خط پر عمود ہوں اور اس طرح سے اس کو بہت سے باریک ٹکڑوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ اب اگر ایسا کیا جائے تو ہر ایک ٹکڑا مستطیل شکل کا ہوگا اور اس کے

دونوں سروں پر دو چھوٹے رقبے بچینگے

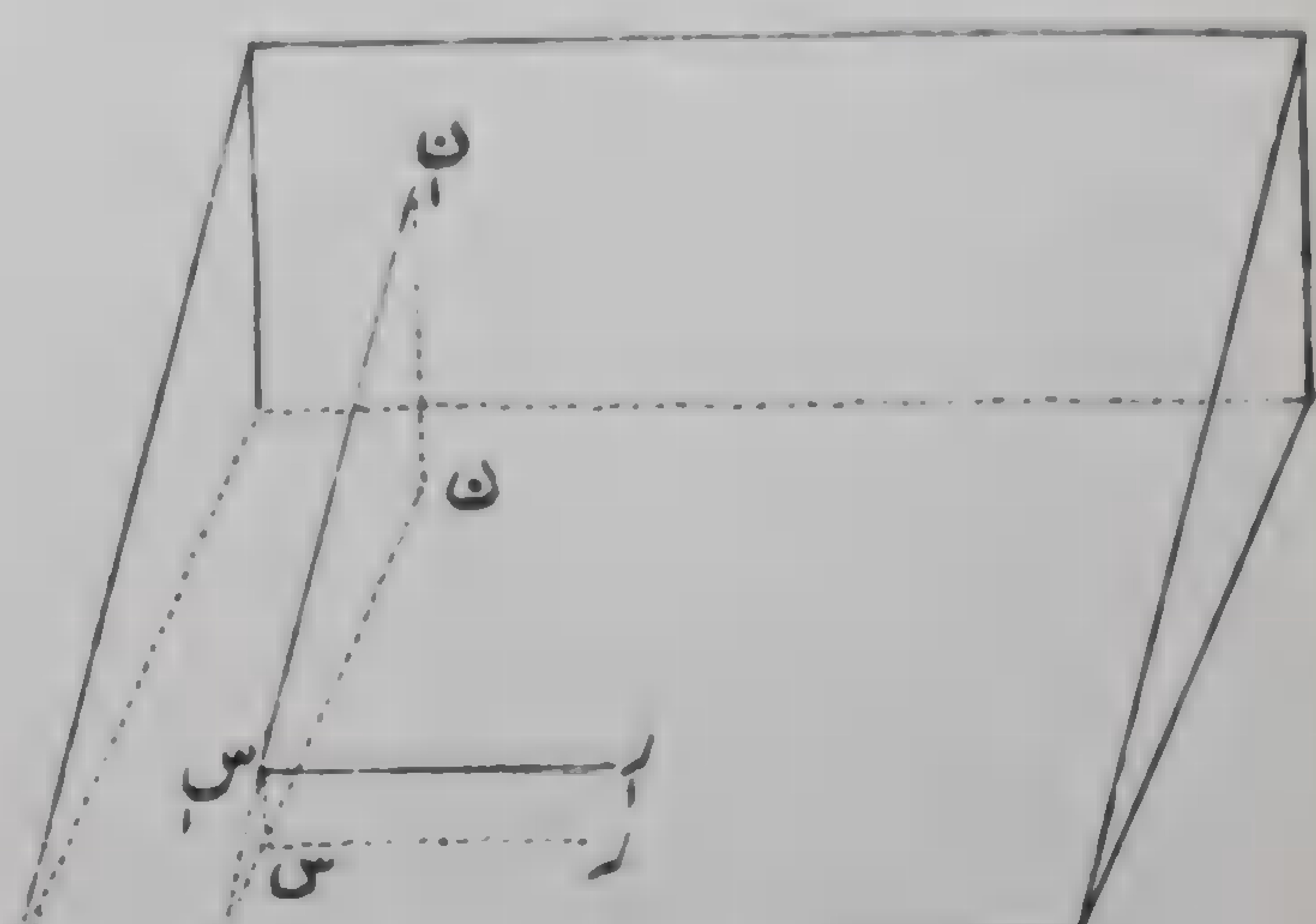


ہم صورت اول میں ثابت کر چکے ہیں کہ ایسے ہر ایک مستطیل کی نسبت اپنے ظِلّ سے مستقل ہوتی ہے پس معلوم ہوا کہ ایسے مستطیلوں کے مجموعہ کو اپنے ظلوں کے مجموعہ کے ساتھ مستقل نسبت ہوگی۔ اب اگر ان مستطیلوں کے عرضوں کو بے حد کم کردیا جائے اور اس طرح سے ان کی تعداد کو بڑھا دیا جائے تو ان (مستطیلون) کے مجموعہ اور دئے ہوئے رقبہ کے تفاوت کو ہم بے حد کم کر سکتے ہیں

اس لئے معلوم ہوا کہ تظلیل سے کسی شکل کا رقبہ ایک ہی نسبت (۱ : جم عہ) سے کم ہوتا ہے اور اصلی سطح پر کے تمام رقبوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ظلوں کو آپس میں ہو۔

مسئلہ س

اگر دو مستقیم خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ان کے ظِل بھی ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں گے بشرطیکہ اصلی خطوں میں سے ایک خط بنیادی خط کے متوازی ہو۔



فرض کرو کہ دو مستقیم خط ن۱س۱ اور س۱ ر۱ ایکدوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان میں سے ایک

خط س ر۱ بنیادی خط ب د کے متوازی ہے
فرض کرو کہ ان کے ظل ن س اور س ر ہیں
اب چونکہ س ر۱، ب د کے متوازی ہے
اس لئے یہ خط سطح تطلیل ن س ب د کو نہیں
ملتا اس لئے س ر۱ اپنے ظل س ر کو نہیں ملتا
نیز س ر۱ اور س ر ایک ہی سطح میں واقع ہیں
اس لئے وہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
لیکن س ر، س س۱ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے
اسلئے س ر۱، س س۱ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقلیدس م ا ش ۲۹]
نیز س ر۱، ن س۱ سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [مفروض]
∴ س ر۱ سطح ن س۱ ب س ن سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقلیدس م ا ش ۴]
∴ س ر سطح ن س۱ ب س ن سے زاویہ قائمہ بناتا ہے [اقلیدس م ۱۱ ش ۸]
اور ن س ر زاویہ قائمہ ہے۔
نوٹ۔ قائم الزاویہ کا ظل قائم الزاویہ نہیں ہوتا جبتک
کہ اصلی زاویہ کی ایک ساق بنیادی خط کے متوازی نہ ہو۔

قطع ناقص یا ہلیلجی

تعریف ۱۔ ہلیلجی (یا قطع ناقص) ایک ایسے نقطہ (ن) کا طریق ہے جس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ س اور ایک ثابت مستقیم خط لا م سے ایسی مستقل نسبت رکھتے ہوں جو ہمیشہ ایک سے کم ہوتی ہے

(س ن = ر×ن م)

۲۔ ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں

۳۔ ثابت خط مستقیم (لا م) کو مرتب کہتے ہیں

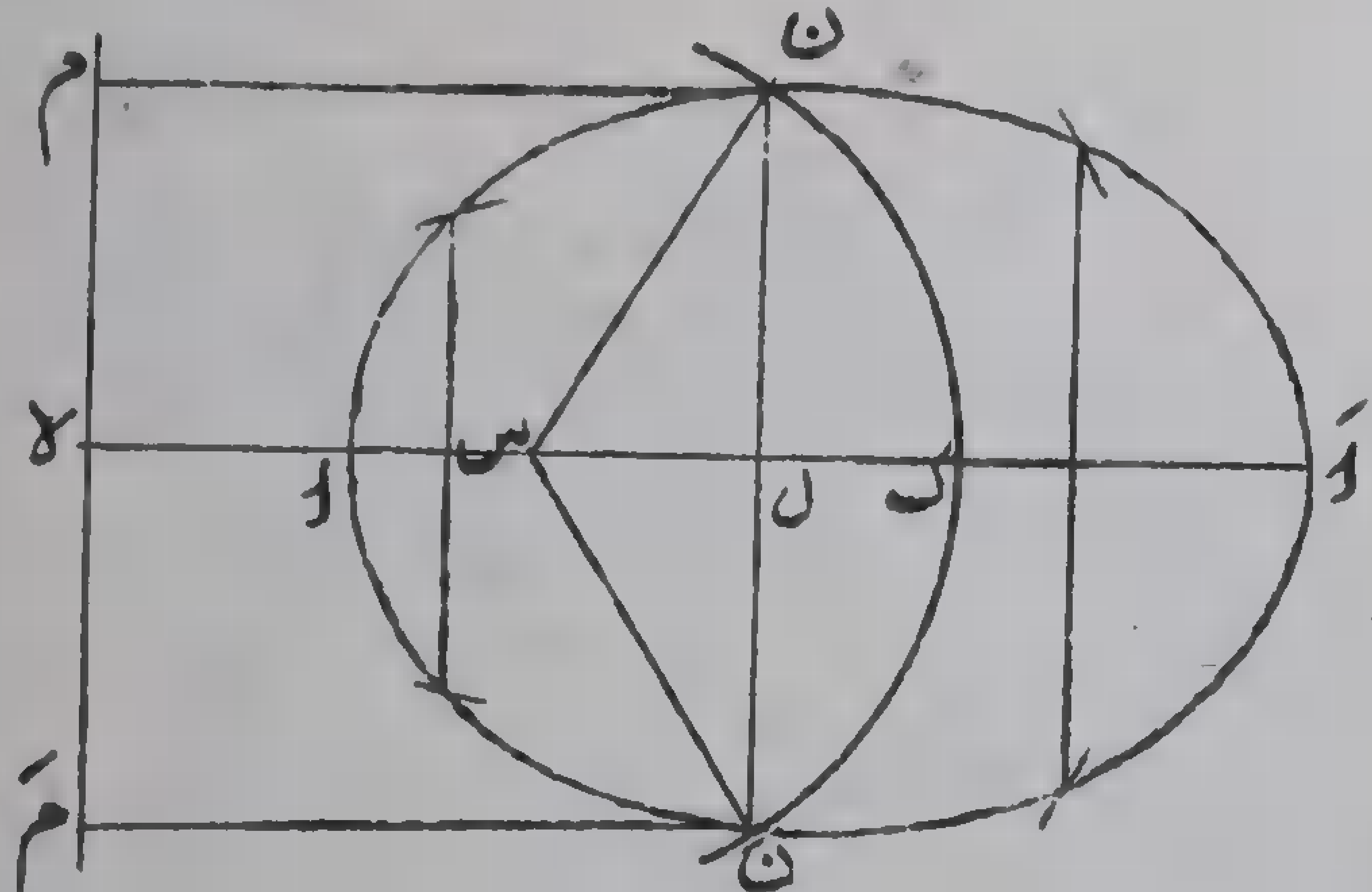
۴۔ مستقل نسبت (ر) کو خروج المرکز کہتے ہیں

مسئلہ ۱

ہلیلجی پر کے نقطے دریافت کرنے کا عمل۔

اگر ماسکہ سے مرتب پر عمود نکالیں تو وہ منحنی کا

محور تشاکل ہوگا راس ا اور اَ کا دریافت کرنا



مانکہ س سے مرتب پر عمود س لا نکالو
لا س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ
س ا = ر × ا لا
نیز لا س ممدودہ پر ایسا نقطہ اَ لو کہ
س اَ = ر × اَ لا
تب ا اور اَ دو نقطے منحنی پر ہیں بموجب تعریف
خط مستقیم ا اَ پر کوئی نقطہ ل لو، س کو مرکز
مانکر ایک دائرہ کھینچو جس کا نصف قطر ر × لا ل
ہو، نقطہ ل میں سے خط ا اَ پر عمود ن ل نَ
کھینچو جو دائرہ کو نقاط ن اور نَ پر ملے، تب
نقاط ن اور نَ اہلیلجی پر ہوں گے، مرتب پر عمود
ن م اور نَ مَ کھینچو

س ن = ر × لا ل = ر × ن م

س نَ = ر × لا ل = ر × نَ مَ

پس معلوم ہوا کہ اگر اۤ پر کوئی نقطہ ل ہو تو اس کے مماثل، عمل بالا سے ہم کو دو ایسے نقطے ن اور نَ منحنی پر حاصل ہوتے ہیں جو اۤ کی مقابل جانبوں میں واقع ہیں اور جن کے فاصلے اۤ سے مساوی ہیں، اس سے ظاہر ہے کہ ہلیلجی بلحاظ اۤ کے متشاکل ہے یعنی اۤ محور ہے اور نقاط ا اور اَ اس کے راس ہیں۔

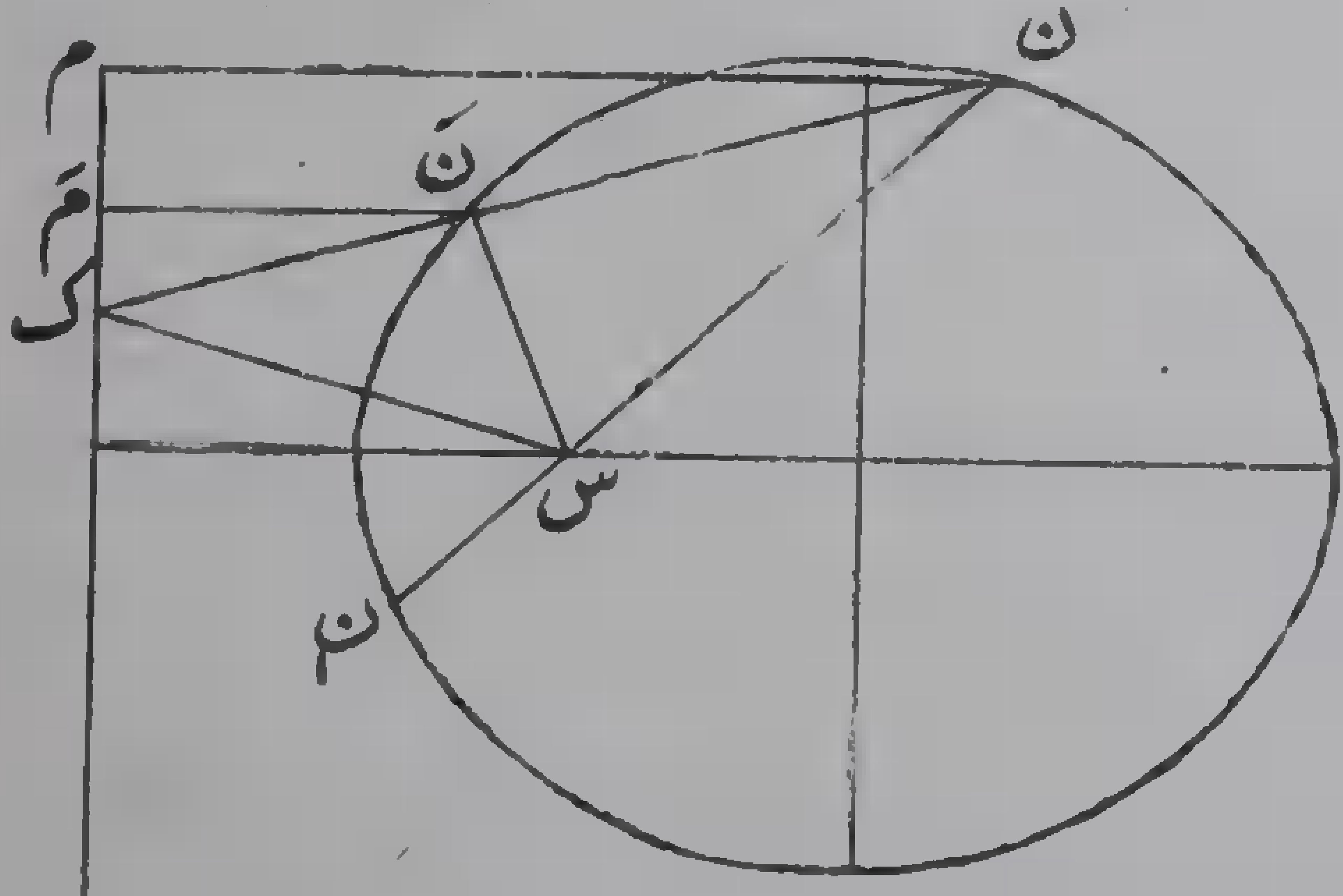
نوٹ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر نقطہ ل، ا اور اَ کے درمیان محور اۤ کے کسی مقام پر واقع ہو تو دائرہ عمود ل ن کو قطع کریگا لیکن جس صورت میں نقطہ مذکورہ اۤ کے باہر ہو تو دائرہ اس عمود کو قطع نہیں کریگا۔ اس سے معلوم ہوا کہ اگر ا اور اَ پر ایسے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ہلیلجی بالکل ان کے درمیان واقع ہوگا۔ دیکھو ضمیمہ

ردیفوں کے لئے دیکھو صفحہ (۵۷ و ۵۸)

مسئلہ ۲

اگر وتر ن نَ مرتب کو نقطہ ک پر قطع کرے تو

ثابت کرو کہ س ک، س ن اور س نَ کے
خارجی زاوئے کی تنصیف کرتا ہے



س ن، س نَ، س ک کو ملاؤ۔ ن س کو ن۱ تک
خارج کرو
اور مرتب پر عمود ن م اور نَ مَ نکالو
تب س ن = ر × ن م
س نَ = ر × نَ مَ
∴ س ن : س نَ = ن م : نَ مَ
= ن ک : نَ ک کیونکہ مثلثات ن ک م
اور نَ ک مَ متشابہ ہیں اس لئے س ک زاویہ
نَ س ن۱ کی تنصیف کرتا ہے [اقلیدس م ٦ ش ٣]

مشقی مثالیں مسئلہ ۲

۱۔ ن س نَ ایک ماسکی وتر ہے، ثابت کروکہ لا ن اور لا نَ محور سے مساوی زاویے بناتے ہیں

۲۔ ن س نَ ایک ماسکی وتر ہے، اگر ن ا اور نَ ا کو خارج کیا جائے تو وہ مرتب کو نقاط ک اور کَ پر ملتے ہیں، ثابت کروکہ ک س کَ زاویہ قائمہ ہے

۳۔ دو وتر ن ق اور نَ قَ مرتب کو بالترتیب ع اور عَ پر ملتے ہیں ثابت کروکہ زاویہ ع س عَ زاویہ ن س نَ کا نصف ہے۔

۴۔ اگر ہیلیجی کا ماسکہ دیا ہوا ہو اور منحنی پر کے دو نقاط دئے ہوں تو ثابت کروکہ مرتب ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے گا۔

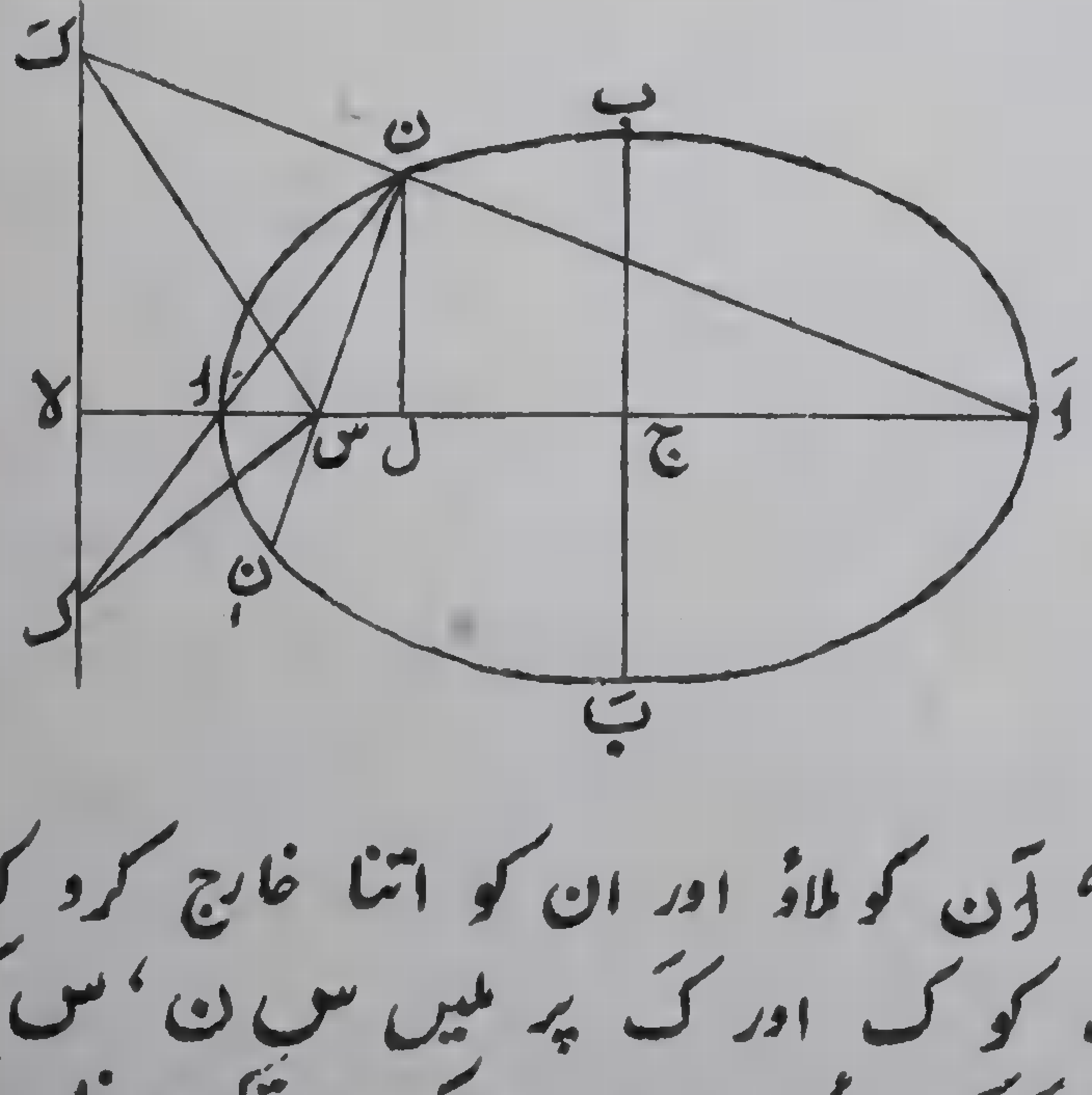
تعریف اگر ماسکہ (س) میں سے گذرنے والا محور ہیلیجی کو ا اور اَ پر ملے تو ااَ کو محور اعظم کہتے ہیں

تعریف اگر ااَ کی تنصیف ج پر کی جائے تو ج کو ہیلیجی کا مرکز کہتے ہیں

تعریف۔ دگنے معیّن ب ج بَ کو جو مرکز ج میں سے کھینچا جائے منحنی کا محور اصغر کہتے ہیں

مسئلہ ۳

اگر اہلیلجی کے کسی نقطہ ن کا معین ن ل ہو تو
ن ل^2 : ا ل × اَ ل = ج ب^2 : ج ا^2
اور ج ب طول میں ج ا سے کم ہے



ن ا، اَن کو ملاؤ اور ان کو اتنا خارج کرو کہ وہ مرتب کو ک اور کَ پر ملیں س ن، س ک، س کَ کو ملاؤ اور ن س کو نَ تک خارج کرو

متشابہ مثلثوں ن ا ل، ک ا لا سے

ن ل : ا ل = ک لا : ا لا

متشابہ مثلثوں ن اَ ل، کَ اَ لا سے

ن ل : اَ ل = کَ لا : اَ لا

∴ ن ل^2 : ا ل × اَ ل = ک لا × کَ لا : ا لا × اَ لا

لیکن س ک زاویہ اس ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
اور س کَ زاویہ اس ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]

∴ ک س کَ قائمہ ہے

∴ ک لا × کَ لا = س لا^2 [اقلیدس م ۳ ش ۸]

∴ ن ل^2 : ال × اَل = س لا^2 : الا × اَلا

اسی طرح سے چونکہ ن ' ب پر منطبق ہو سکتا ہے اس لئے

ب ج^2 : اج^2 = س لا^2 : الا × اَلا

∴ ن ل^2 : ال × اَل = ب ج^2 : اج^2

نیز ب ج^2 : اج^2 = س لا^2 : الا × اَلا

اب س لا = الا + س ا = الا (۱ + ر)

س لا = اَلا − س اَ = اَلا (۱ − ر)

∴ س لا^2 = (۱ − ر^2) الا × اَلا < الا × اَلا

∴ ب ج < اج

مشقی مثالیں مسئلہ ۱

۱- اگر ایک شلجمی اور ایک ہلیلجی کا ماسکہ ایک ہی ہو اور منتظم بھی مشترک ہو تو ثابت کرو کہ شلجمی، ہلیلجی کے بالکل باہر واقع ہوتا ہے۔

۲- ثابت کرو کہ ایک نقطہ ن ہلیلجی کے اندر واقع ہوگا

اگر نسبت س ن : ن م خروج المرکز سے چھوٹی ہو، اور منحنی پر واقع ہوگا اگر یہ نسبت خروج المرکز کے برابر ہو اور منحنی کے باہر واقع ہوگا اگر یہ نسبت خروج المرکز سے بڑی ہو، اس میں ن م منتظم پر عمود کھینچا گیا ہے۔

۳۔ ہلیلجی کا کوئی وتر ن ق مرتب کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

س ن : ن ر = س ق : ق ر

۴۔ ایک مستقیم خط ہلیلجی کو ن پر اور مرتب کو ر پر ملتا ہے، ن ر پر کوئی نقطہ ک ہے اور ک سے س ر کے متوازی ک ی کھینچا گیا ہے جو س ن کو ی پر ملتا ہے، نیز ک سے مرتب پر عمود ک ے نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ س ی = ر × ک ے

مشقی مثالیں مسئلہ ۳

۱۔ اگر ب ج بَ پر عمود ن م نکالا جائے تو ثابت کرو کہ

ن م^۲ : ب م × بَ م = ج اَ^۲ : ج ب^۲

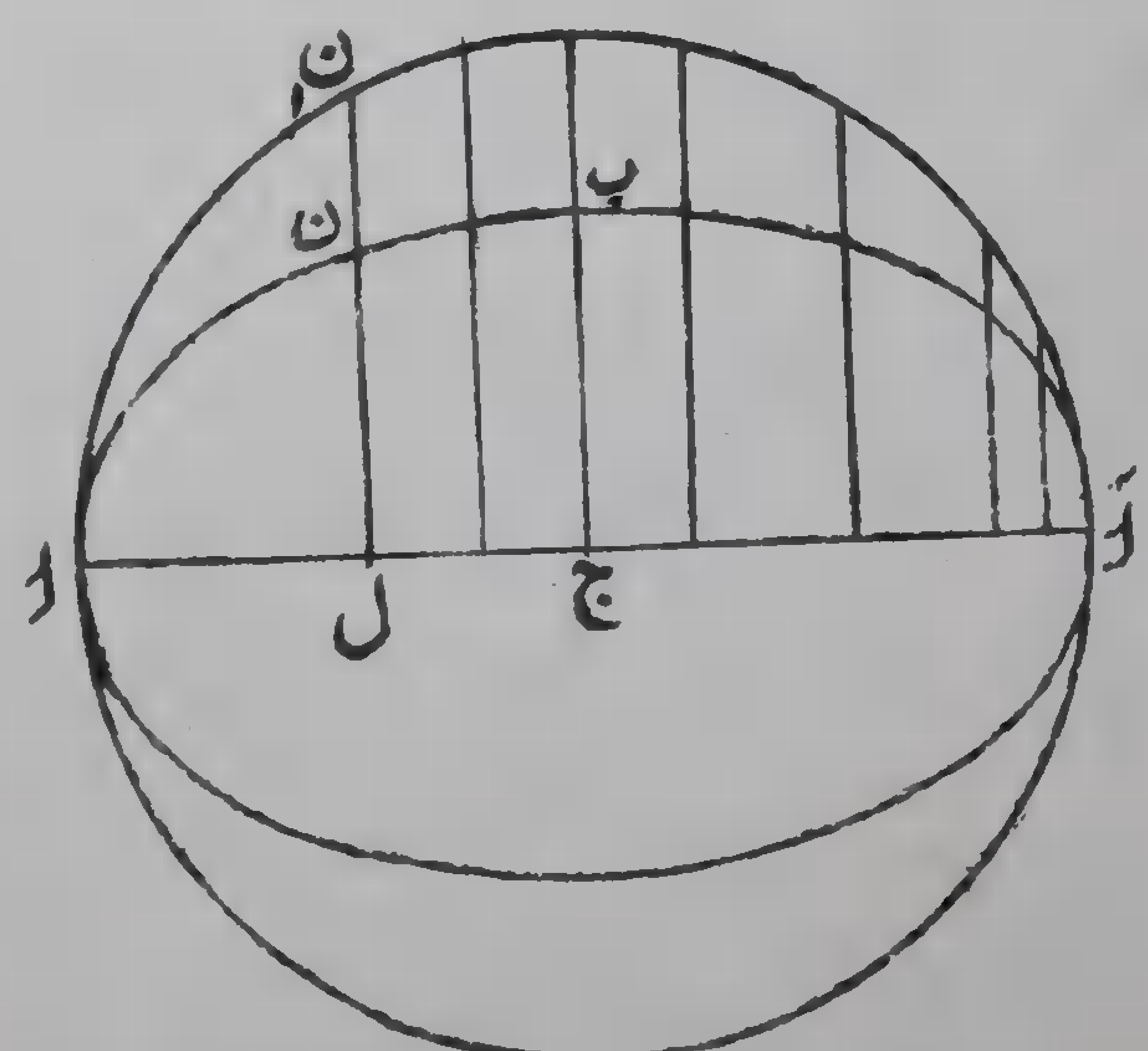
۲۔ ہلیلجی پر دو نقطے ن اور ق ہیں، اق اور اَق، ن ل یا ن ل محدودہ کو بالترتیب م۱ اور م۲ پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ

ن ل² = م₁ ل × م₂ ل

مسئلہ ۴

اگر اا' کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور اس دائرہ کے معینوں کو نسبت ج ا : ج ب میں کم کردیا جائے تو ان کے سروں کا طریق قطع ناقص ہوگا

(ن₁ ل : ن ل = ج ب : ج ا)



فرض کرو کہ اا' کے نصف قطر پر دائرہ ا ن₁ ا' بنایا گیا ہے اور ن₁ کا معین ن₁ ن ل ہے جو ہلیلجی کو ن پر ملتا ہے۔

ن₁ ل² : ا ل × ا' ل = ج ب² : ج ا'² [مسئلہ ۳]

لیکن ن۱ ل۲ = ال × اَل [اقلیدس م۳ ش۳۵]

∴ ن ل۲ : ن۱ ل۲ = ج ب۲ : ج ا۲

یعنی ن ل : ن۱ ل = ج ب : ج ا

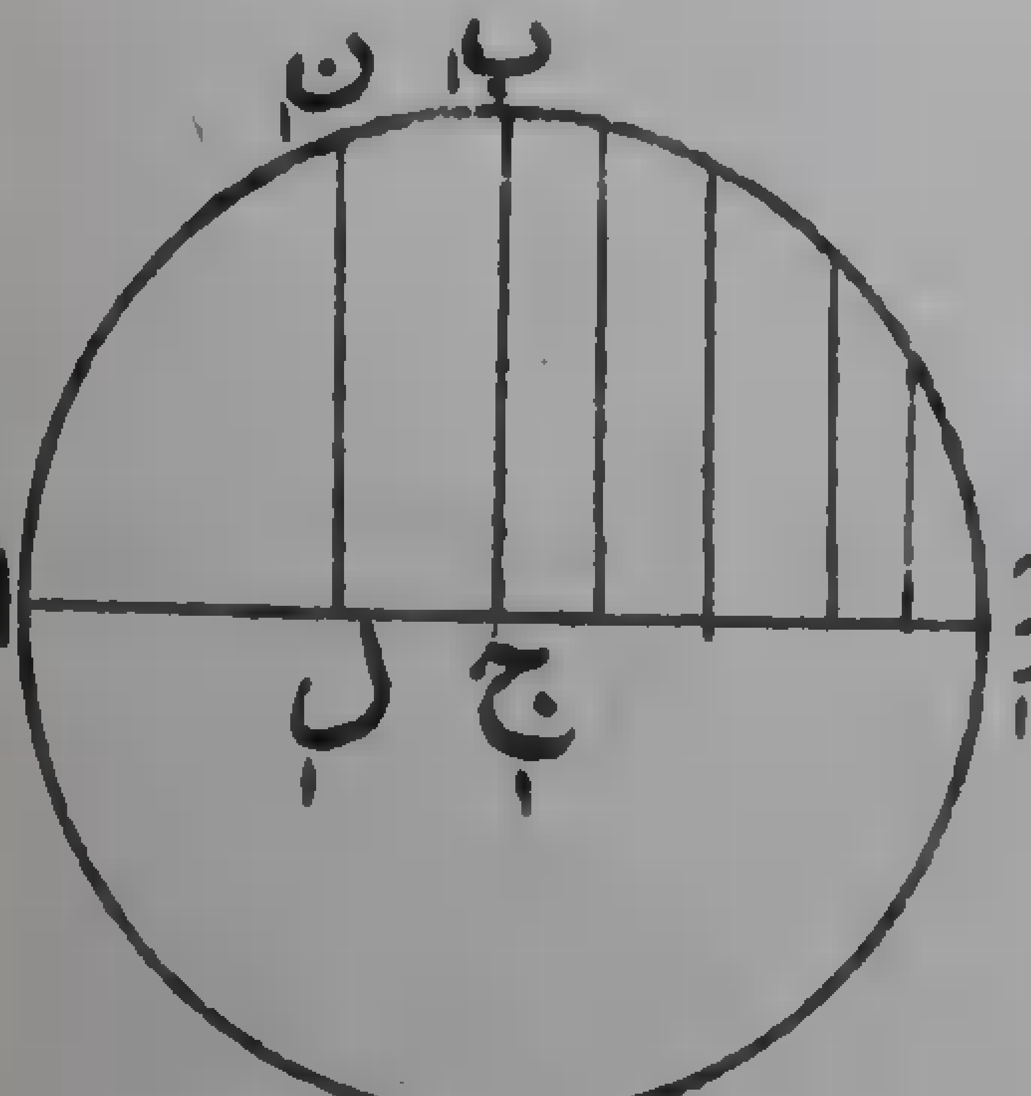
تعریفات ۱- جو دائرہ ا اَ کے قطر پر بنایا جائے اس کو امدادی یا معاون دائرہ کہتے ہیں

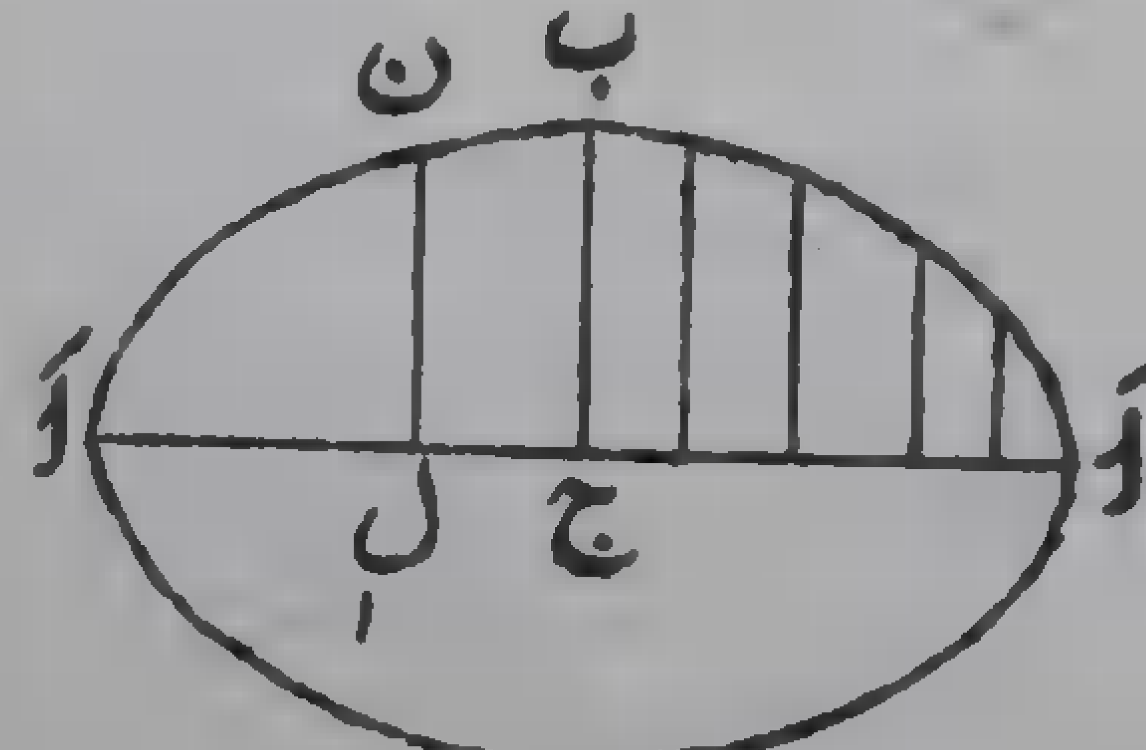
۲- اگر نقاط ن۱ اور ن ہلیلجی اور امدادی دائرہ کے مشترک معین پر واقع ہوں تو وہ نظیری نقطے کہلاتے ہیں۔

۳- ہلیلجی کے ایک وتر اور امدادی دائرہ کے ایک وتر دونوں کو نظیری وتر کہینگے اگر ان کے سرے نظیری نقطے ہوں۔

مسئلہ ۵

دائرہ کا ظل قطع ناقص ہوتا ہے





فرض کرو کہ دائرہ معلومہ اِ نِ اَ ہے جس کا قطر اِ اَ بنیادی خط کے متوازی ہے اور جس میں نصف قطر جِ بِ، اِ اَ پر عمود ہے، نیز فرض کرو کہ کسی نقطہ نِ سے اِ اَ پر عمود نِ لِ نکالا گیا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ اِ نِ بِ اَ کا ظل ا ن ب اَ ہے اور نقاط اِ، اَ، بِ، جِ، نِ، لِ کے ظل ا، اَ، ب، ج، ن، ل ہیں

تب نِ لِ² = اِ لِ × لِ اَ [اقلیدس م۳ ش۱۳ اور ۳۵]

∴ نِ لِ² = جِ بِ² = اِ لِ × لِ اَ : جِ اِ²

لیکن نِ لِ² : جِ بِ² = ن ل² : ج ب² [مسئلہ ج]

اور اِ لِ × لِ اَ : جِ اِ² = ا ل × ل اَ : ج اَ²

∴ ن ل² : ج ب² = ا ل × ل اَ : ج اَ²

نیز ن ل اور ج ب خط ا اَ پر عمود ہیں [مسئلہ س] اس لئے ثابت ہوا کہ ن کا طریق ایک ہلیلجی ہے جس کے محور ج ا اور ج ب ہیں [مسئلہ ۳]

نوٹ دائرہ اِ بِ اَ امدادی دائرہ کے مساوی ہے۔

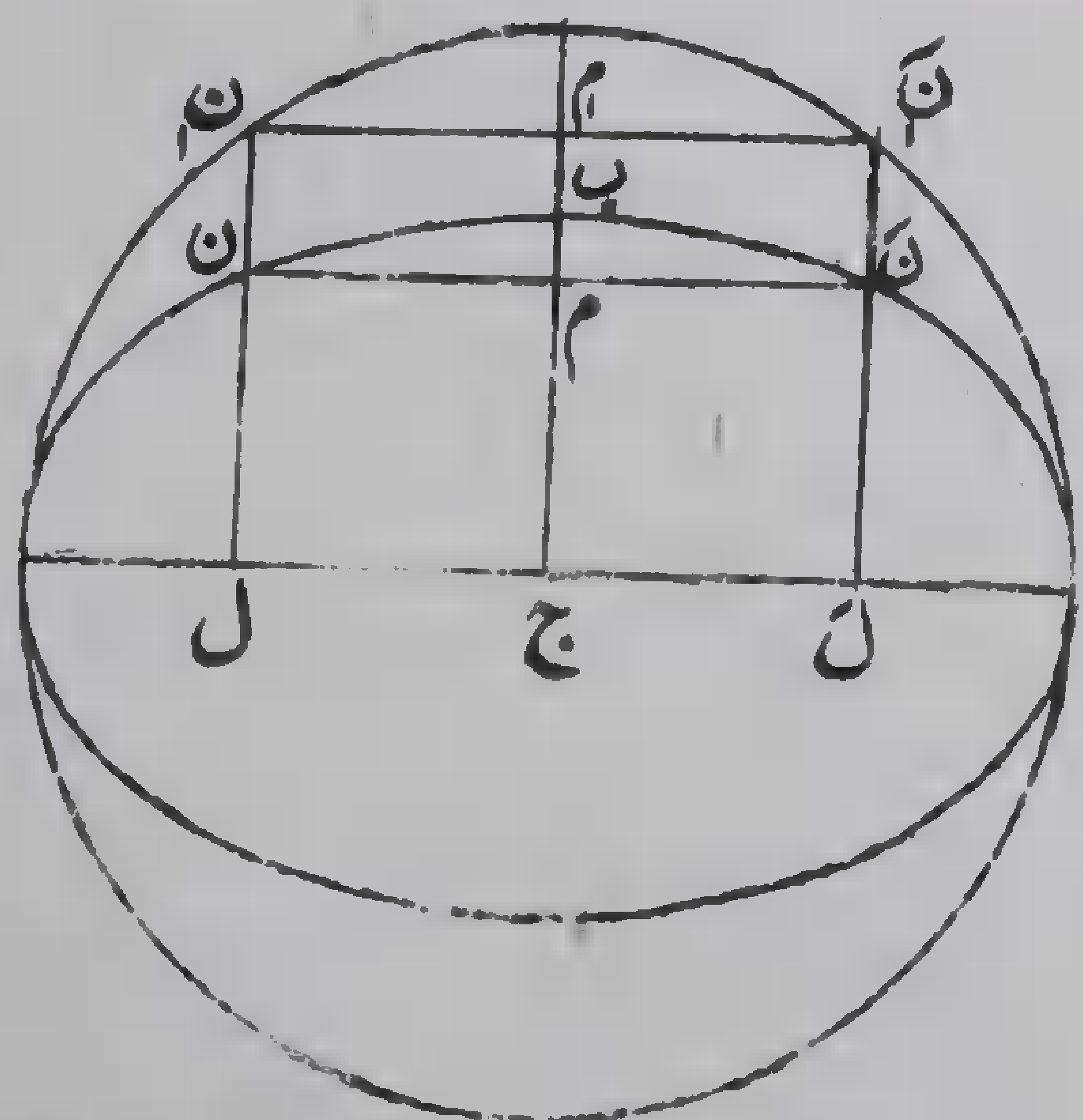
نسبت ج ب : ج ا = جم عہ جہاں عہ زاویہ تظلیل ہے

ہلیلجی کا رقبہ = π × ا ج × ب ج

مسئلہ ۶

ثابت کرو کہ قطع ناقص بلحاظ محور اصغر کے متشاکل ہے

اور اس کا ایک اور ماسکہ (سَ) ہے اور ایک اور مرتب بھی ہے۔



فرض کروکہ ن م نَ امدادی دائرے کا وتر ہے جو محور اصغر کو نقطہ م پر قطع کرتا ہے اور اس سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ اہلیلجی پر ن اور نَ کے نظیری نقاط ن اور نَ لو اور مشترک معین ن ن ل اور نَ نَ لَ کھینچو، ن نَ کو ملاؤ اور فرض کروکہ یہ محور اصغر کو م پر قطع کرتا ہے

تب ن ل = نَ لَ [اقلیدس م اشں ۳۴]

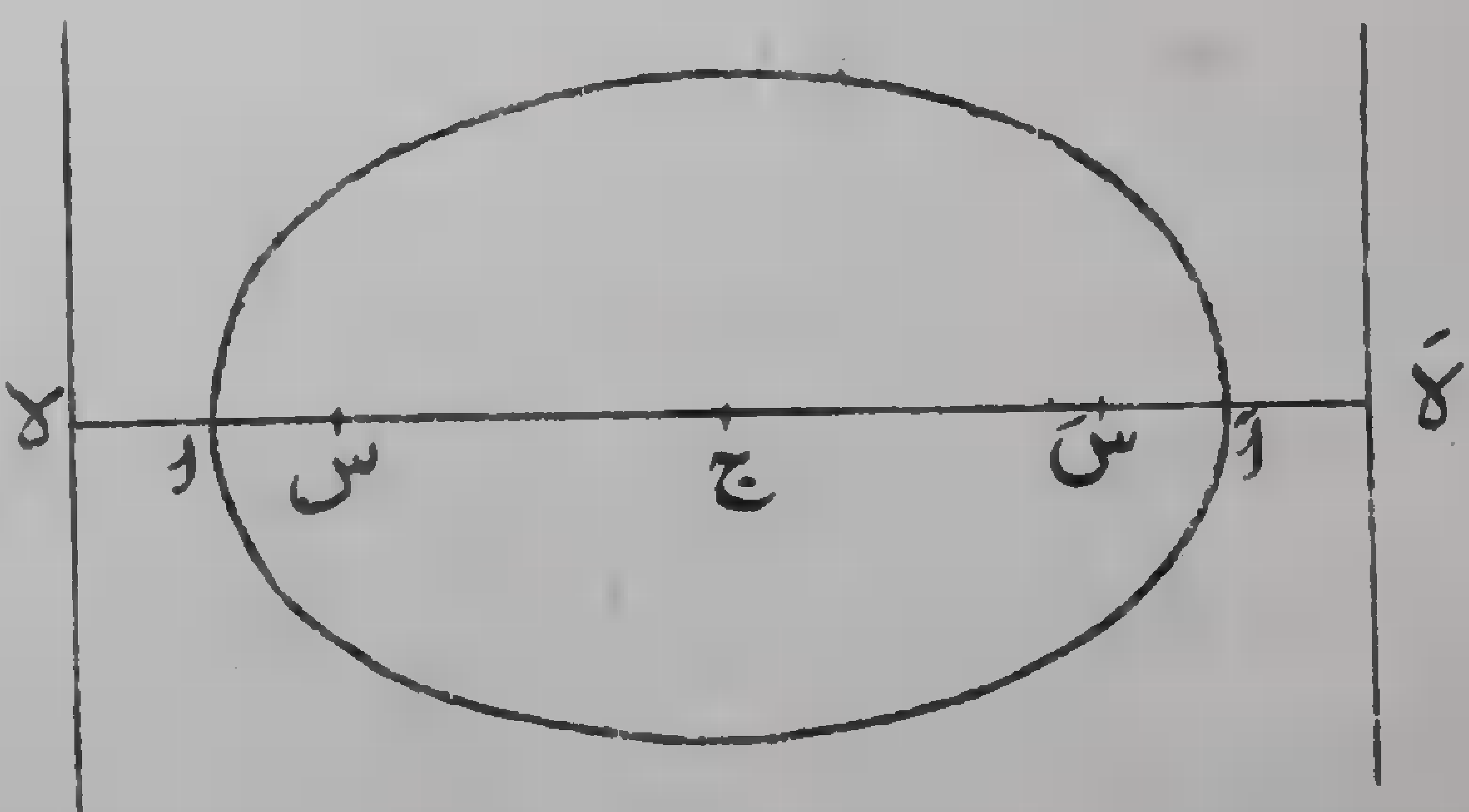
∴ ن ل = نَ لَ [مسئلہ ۴]

اس لئے ن نَ، ل لَ کے متوازی ہے اور ج ب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

نیز ن م = نَ م [اقلیدس م ۳ شں ۳]

ن م = نَ م [اقلیدس م اش ۳۴]

اس لئے اگر قطع ناقص پر کوئی نقطہ ن ہو تو اس کے مقابل لازماً ایک اور نقطہ نَ ہیلیجی پر ایسا ہے کہ ن اور نَ کو ملانے والا خط محور اصغر سے زاویہ قائمہ بناتا ہے اور اس پر دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوجاتا ہے یعنی معلوم ہوا کہ ناقص بلحاظ محور اصغر کے متشاکل ہے۔



پس ج سَ کو ج س اور ج لاَ کو ج لا کے مساوی قطع کرو اور لا میں سے ایک خط ایسا کھینچو جو ا اَ پر عمود ہو، ظاہر ہے کہ اگر یہ خط مرتب ہو اور سَ ماسکہ اور خروج المرکز کی وہی قیمت ہو جو پہلے تھی تو بھی قطع ناقص مرتسم ہو سکتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۴

۱- ایک مستقیم خط ہلیلجی کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتا

۲- اُن سب خطوط میں سے جو مرکز کو منحنی کے کسی نقطہ سے ملاتے ہیں ج ا سب سے بڑا ہے اور ج ب سب سے چھوٹا ہے۔

۳- دو نظیری نقطے ن اور ق بالترتیب ہلیلجی اور امدادی دائرہ پر واقع ہیں، نقطہ ن میں سے ایک خط ک ن ل ایسا کھینچا گیا ہے جو محوروں کو نقاط ک اور ل پر ملتا ہے اور ان سے وہی زاوئے بناتا ہے جو خط ج ق بناتا ہے، ثابت کروکہ ک ل کا طول مستقل ہے

۴- محور اصغر کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور ہلیلجی پر کے کسی نقطہ ن سے ب بَ پر عمود ن م نکالا گیا ہے، اگر یہ عمود دائرہ مذکورہ کو نقطہ نَ پر ملے تو ثابت کروکہ

ن م : نَ م = ج ا : ج ب

۵- اگر ایک سلاخ اسطرح حرکت کرے کہ اس کے سرے ہمیشہ دو ثابت مستقیم خطوں پر رہیں اور یہ خط ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں توثابت کروکہ سلاخ

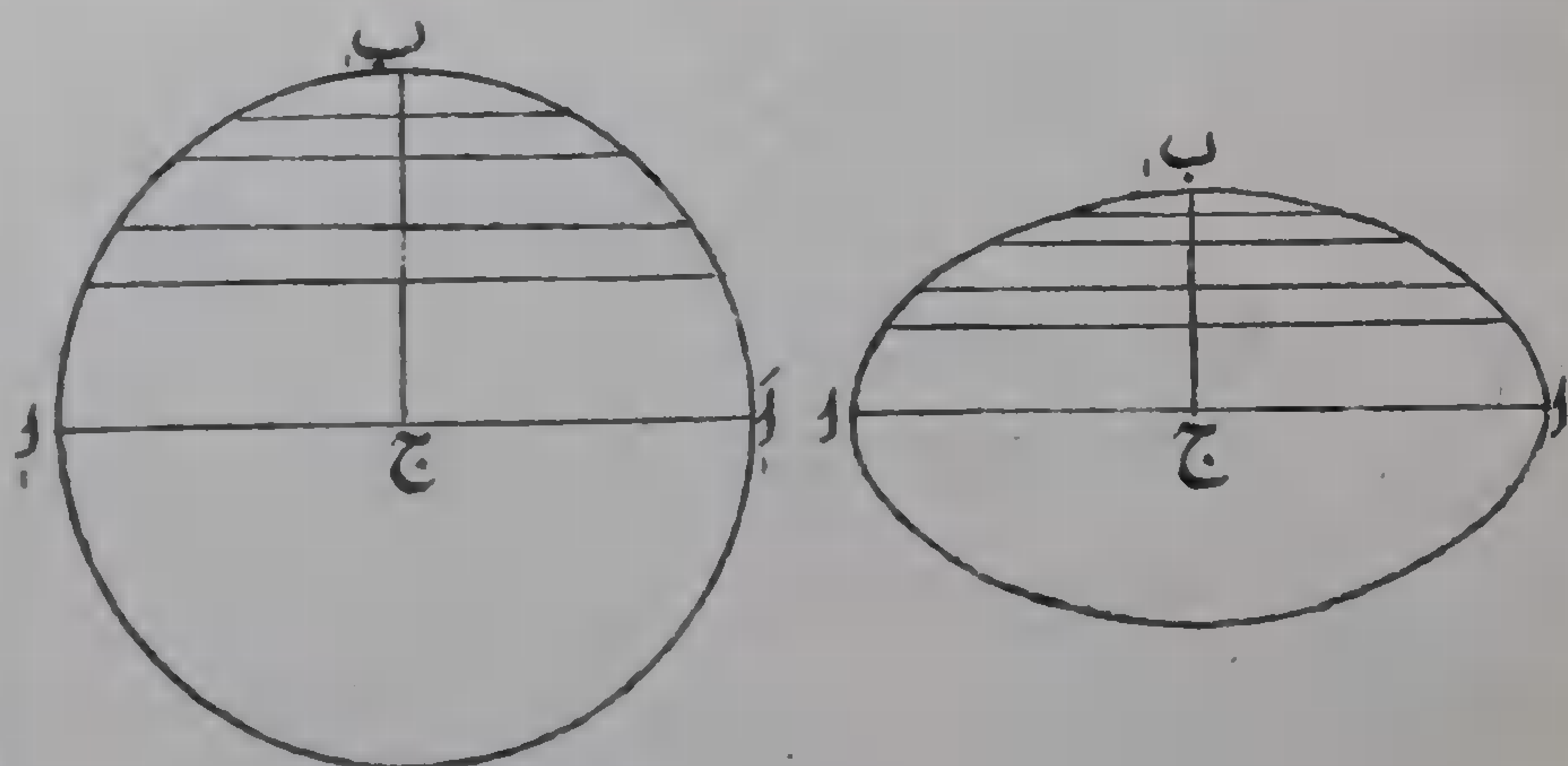
پر کا کوئی نقطہ ایک قطع ناقص مرتسم کریگا۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۵

قطع ناقص کا ظل دائرہ ہو سکتا ہے

مسئلہ ٦ (متبادل ثبوت)

فرض کرو کہ اِ ب اَ ایک دائرہ ہے اور اِ ب اَ اسکا ظِل ہے

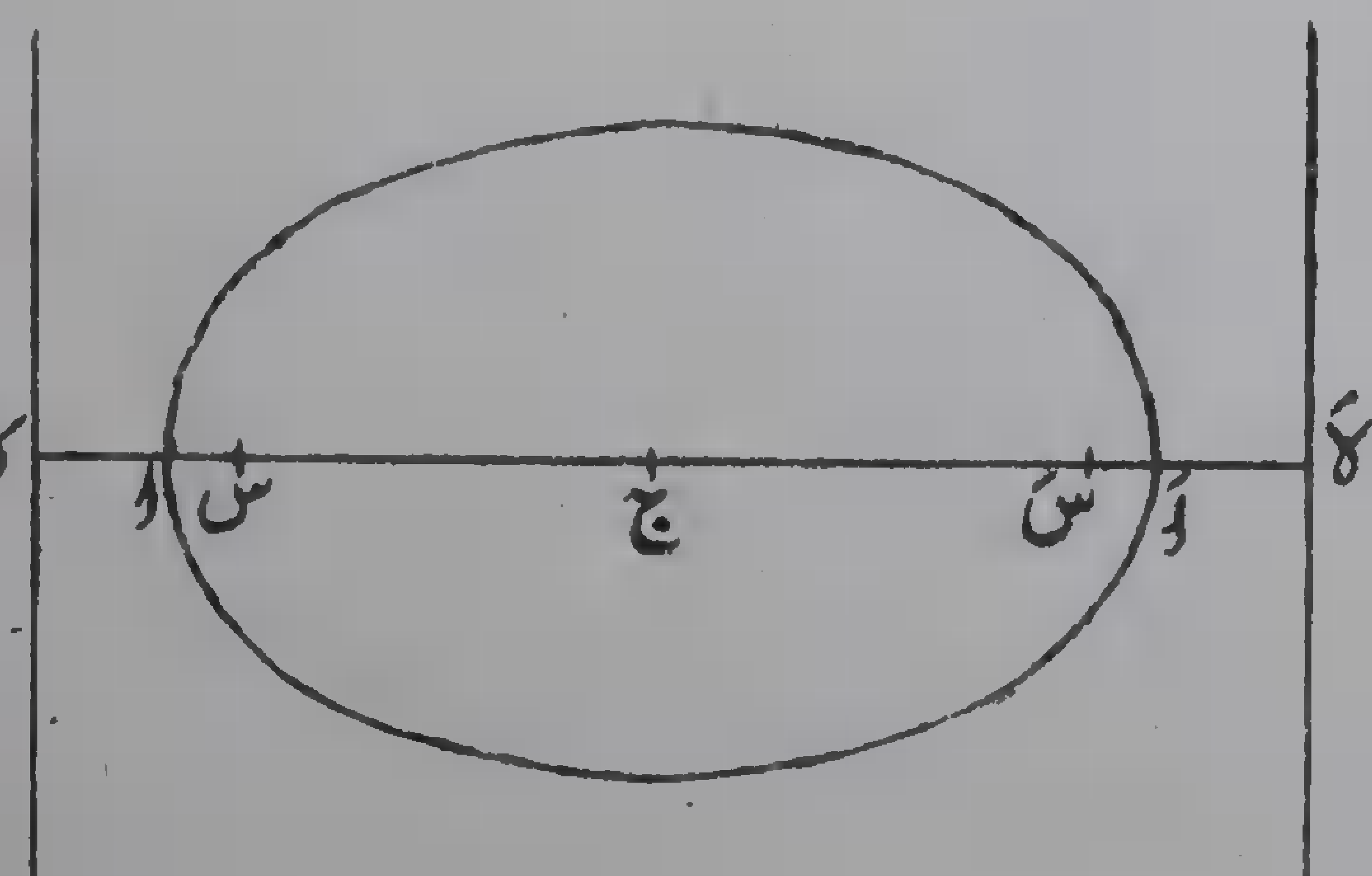


ج ب دائرہ کے اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو اِ اَ کے متوازی ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳]
اس لئے ج ب ہلیلجی کے اُن سب وترون کی تنصیف کرتا ہے جو اِ اَ کے متوازی ہیں [مسئلہ ج]
اور ج ب اُن سب وترون پر عمود ہے جبکی

یہ تنصیف کرتا ہے [مسئلہ س]
اس لئے ہلیلجی بلحاظ محور اصغر کے متشاکل ہے اور مرکز کے دوسری طرف اس کا دوسرا ماسکہ اور دوسرا مرتب دونوں واقع ہیں جن کی مدد سے ہلیلجی مرتسم ہو سکتا ہے۔

مسئلہ ۷

ج ا = ر × ج لا ، ج س = ر × ج اً ، ج س × ج لا = ج اً²



س ا = ر × ا لا [بموجب تعریف]
س اً = ر × اً لاً [بموجب تعریف]
جمع کرنے سے
ا اً = ر (ا لا + اً لاً) = ر (ا لا + ا لاً) = ر × لا لاً
∴ ج ا = ر × ج لا ... (۱)

تفریق کرنے سے

س سَ = ر × ا اَ

∴ ج س = ر × ج ا ...... (۲)

∴ ج س × ج لا = ج ا^{2} ..... (۳)

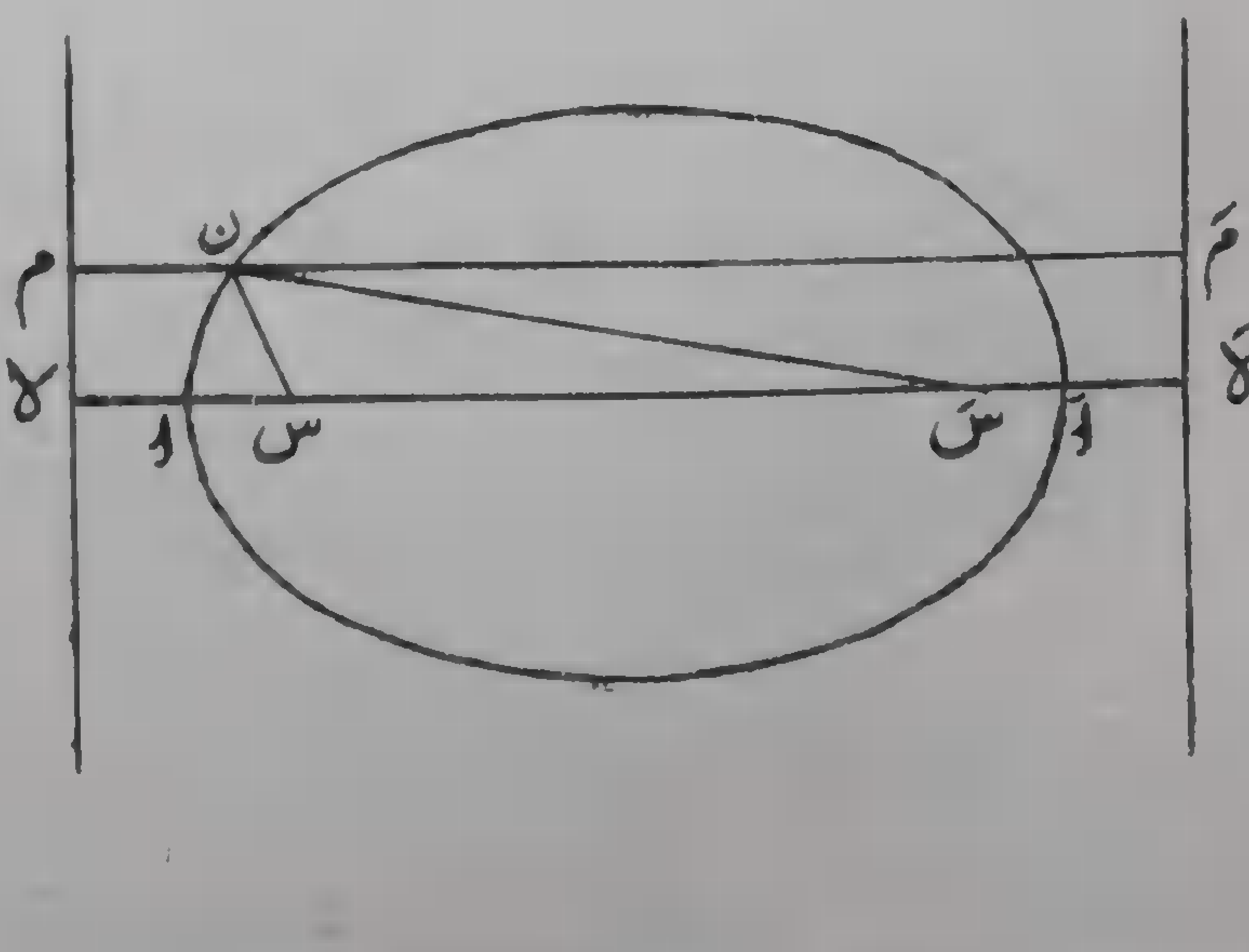
مشقی مثالیں مسئلہ ۷

قطع ناقص اور اس کا ایک ماسکہ دیا ہوا ہے، مرکز اور خروج المرکز دریافت کرو

مسئلہ ۸

س ن + سَ ن = ا اَ

اہلیلجی کو مرتسم کرنے کی آلی ترکیب



مرتبوں پر عمود م ن مَ کھینچو

تب س ن = ر × ن م

سَ ن = ر × ن مَ

∴ س ن + سَ ن = ر × م مَ

= ر × لا لاَ

= ا اَ

اس لئے اگر س اور سَ پر دو چھوٹی کھونٹیاں ہوں اور رسی کا ایک بند حلقہ ان کے گرد گزرے تو ایک پنسل کا سرا ن جو حلقہ کو خوب کس کر کھینچے رکھے ایک ایسے قطع ناقص کو مرتسم کرے گا جس کے ماسکے س اور سَ ہوں گے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۸

۱۔ اگر ن کوئی نقطہ ہو تو س ن + سَ ن بڑا ہوگا ا اَ سے اگر ن ہلیلجی کے باہر ہو اور مساوی ہوگا اگر ن ہلیلجی پر ہو اور چھوٹا ہوگا اگر ن ہلیلجی کے اندر ہو۔

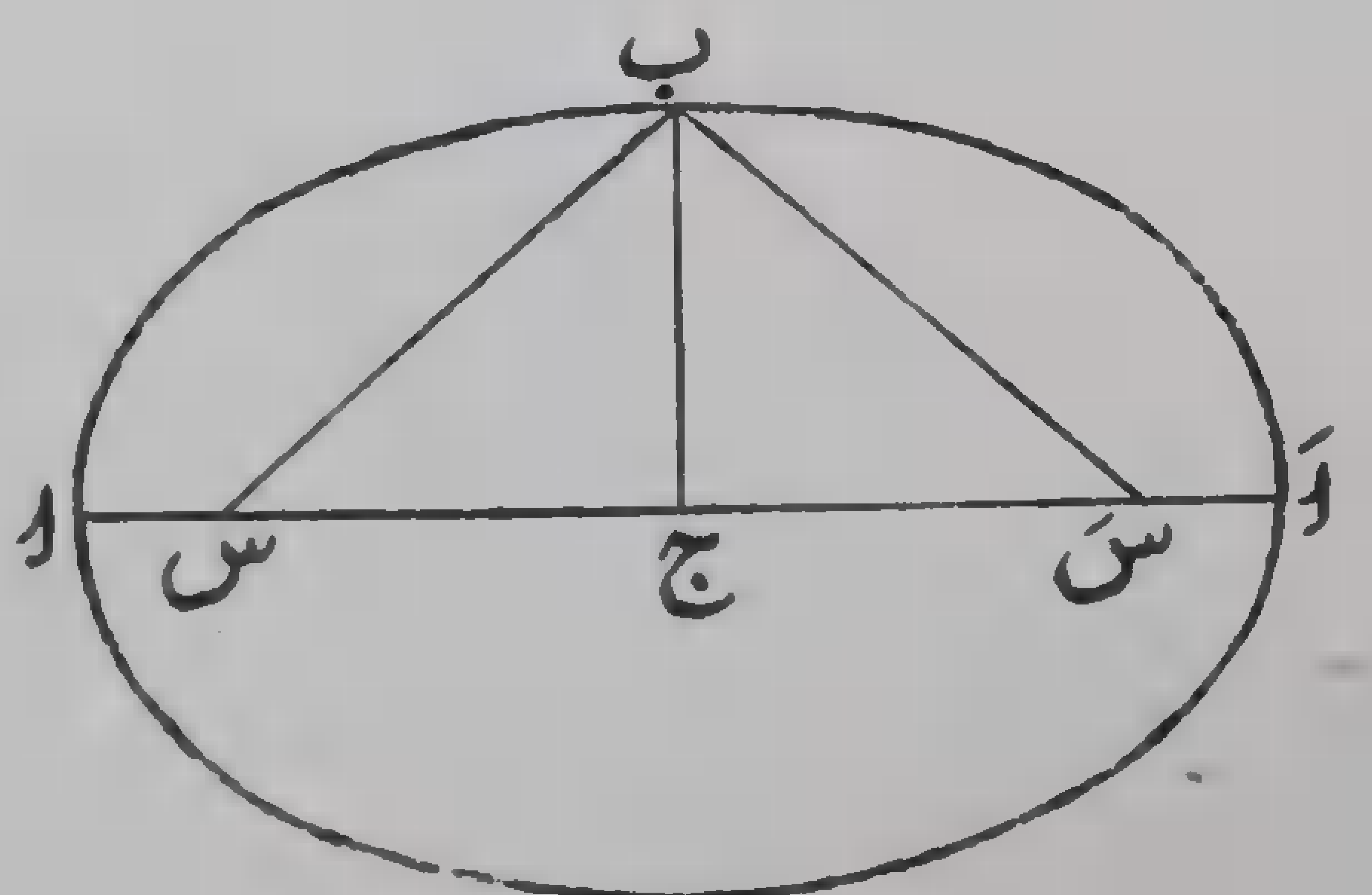
۲۔ ایک دائرہ دوسرے دائرہ کے بالکل اندر کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ایک ایسے نقطہ کا مقام جو دونوں دائروں کے محیطوں سے مساوی فاصلہ پر ہو ایک ہلیلجی ہے۔

۳- دو ہلیلجی خطوں کا ماسکہ مشترک ہے اور ان کے اعظم محور مساوی ہیں ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو دو سے زیادہ نقطوں پر قطع نہیں کر سکتے۔

۴- ثابت کرو کہ جو مستقیم خط ن س اور ن سَ کے خارجی زاویے کی تنصیف کرتا ہے وہ قطع ناقص کو دوبارہ نہیں قطع کر سکتا۔

مسئلہ ۹

ج ب^2 = ج ا^2 - ج س^2 = س ا × س اَ



س ب + سَ ب = ا اَ [مسئلہ ۸]

لیکن س ب = سَ ب [اقلیدس م اش ۴]

∴ س ب = ج ا

ج ب^2 = س ب^2 - ج س^2 [اقلیدس م اش ۴۷]

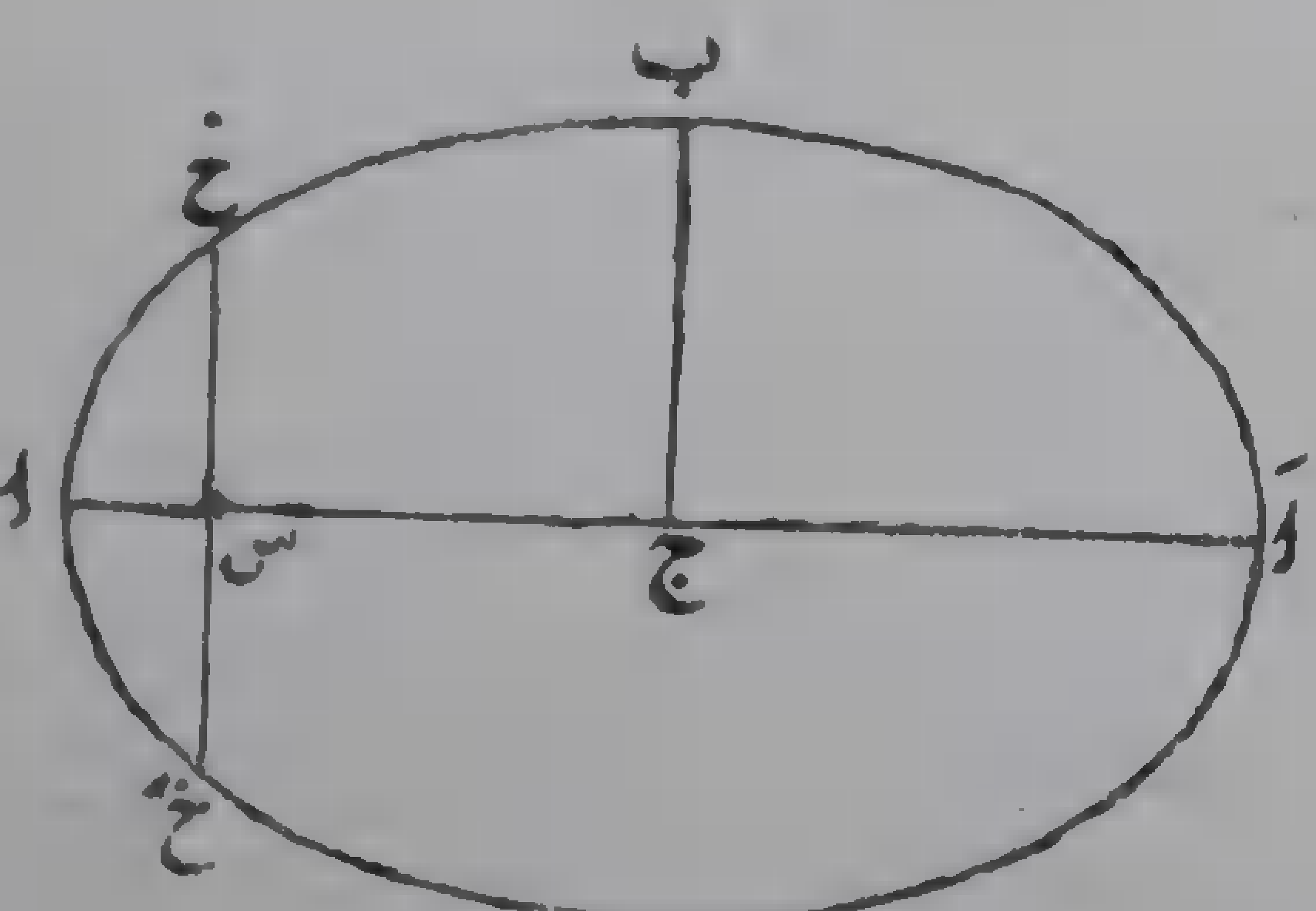
= ج اَ۲ - ج س۲

= س ا × س اَ [اقلیدس م ۲ ش ۵]

تعریف ماسکہ میں سے گزرنے والے رو گمنے معیّن کو ہم وتر خاص (خ خَ) کہیں گے۔

مسئلہ ۱۰

ثابت کرو کہ نیم وتر خاص س خ، ج ا اور ج ب کا تیسرا متناسب ہے یعنی س خ × ج ا = ج ب۲



س خ۲ : ا س × اَ س = ج ب۲ : ج اَ۲ [مسئلہ ۳]

لیکن ا س × اَ س = ج ب۲ [مسئلہ ۹]

∴ س خ۲ : ج ب۲ = ج ب۲ : ج اَ۲

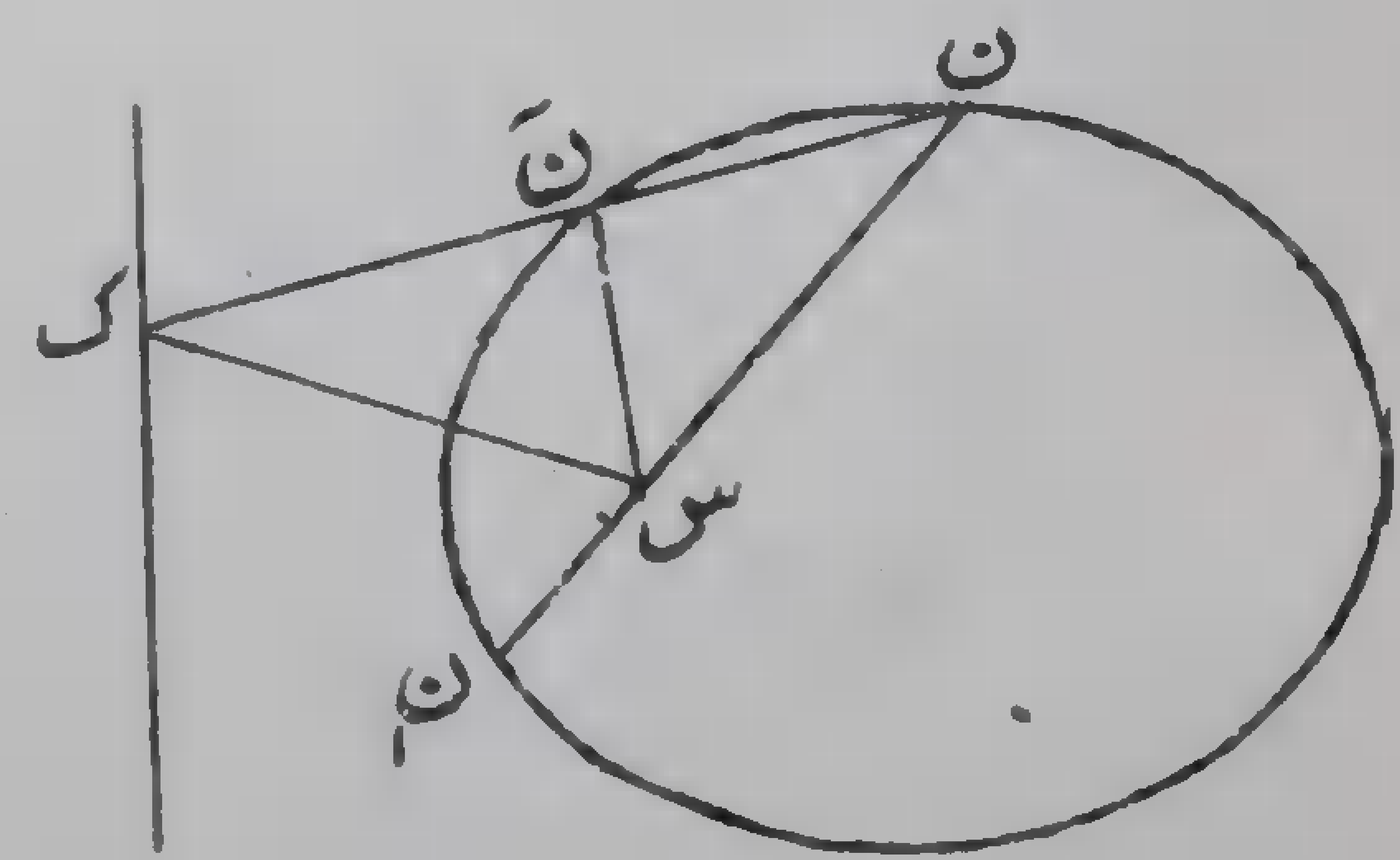
∴ س خ : ج ب = ج ب : ج ا

∴ س خ × ج ا = ج ب۲

مسئلہ ۱۱

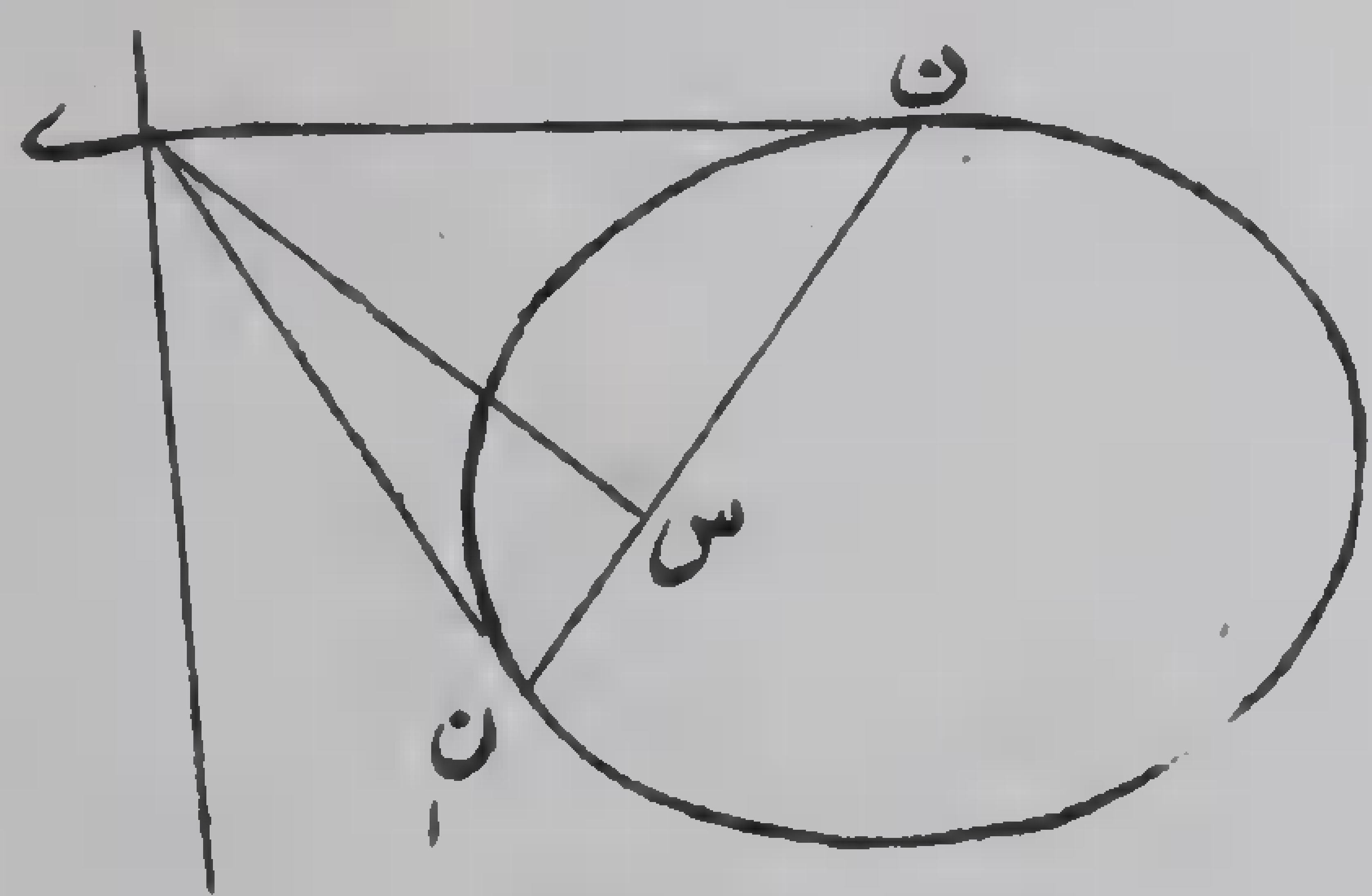
اگر ن پر کا مماس مرتب کو ے پر ملے تو ثابت کرو کہ زاویہ ن س ے قائمہ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں



اہلیلجی پر کے نقطہ ن کے قریب ایک نقطہ نَ لو اور فرض کرو کہ وتر ن نَ مرتب کو ک پر ملتا ہے کا ن س کو نٖ تک خارج کرو

تب ک سَ زاویہ نَ س نٖ کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]



جب نَ ن پر منطبق ہوتا ہے جس وقت
ن نَ ک مماس ن ے بن جاتا ہے اُسوقت
زاویہ نَ س ن دو قائموں کے برابر ہوتا ہے
اس لئے زاویہ ن س ے قائمہ ہے

اسلئے ے س ن زاویہ قائمہ ہے اور ے ن
نقطہ ن پر کا مماس ہے یعنی ن اور ن پر کے
مماس ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں،

۱۔ وتر خاص کے سروں پر کے مماس ایکدوسرے
کو نقطہ لا پر قطع کرتے ہیں

۲۔ اگر ہلیلجی کے کسی نقطہ ن میں سے محور پر عمود
ق ن ل نکالا جائے اور یہ عمود خ پر کے
مماس کو ق پر اور محور کو ل پر ملے تو ثابت
کرو کہ   ق ل = س ن

۳۔ ہلیلجی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس کھینچو

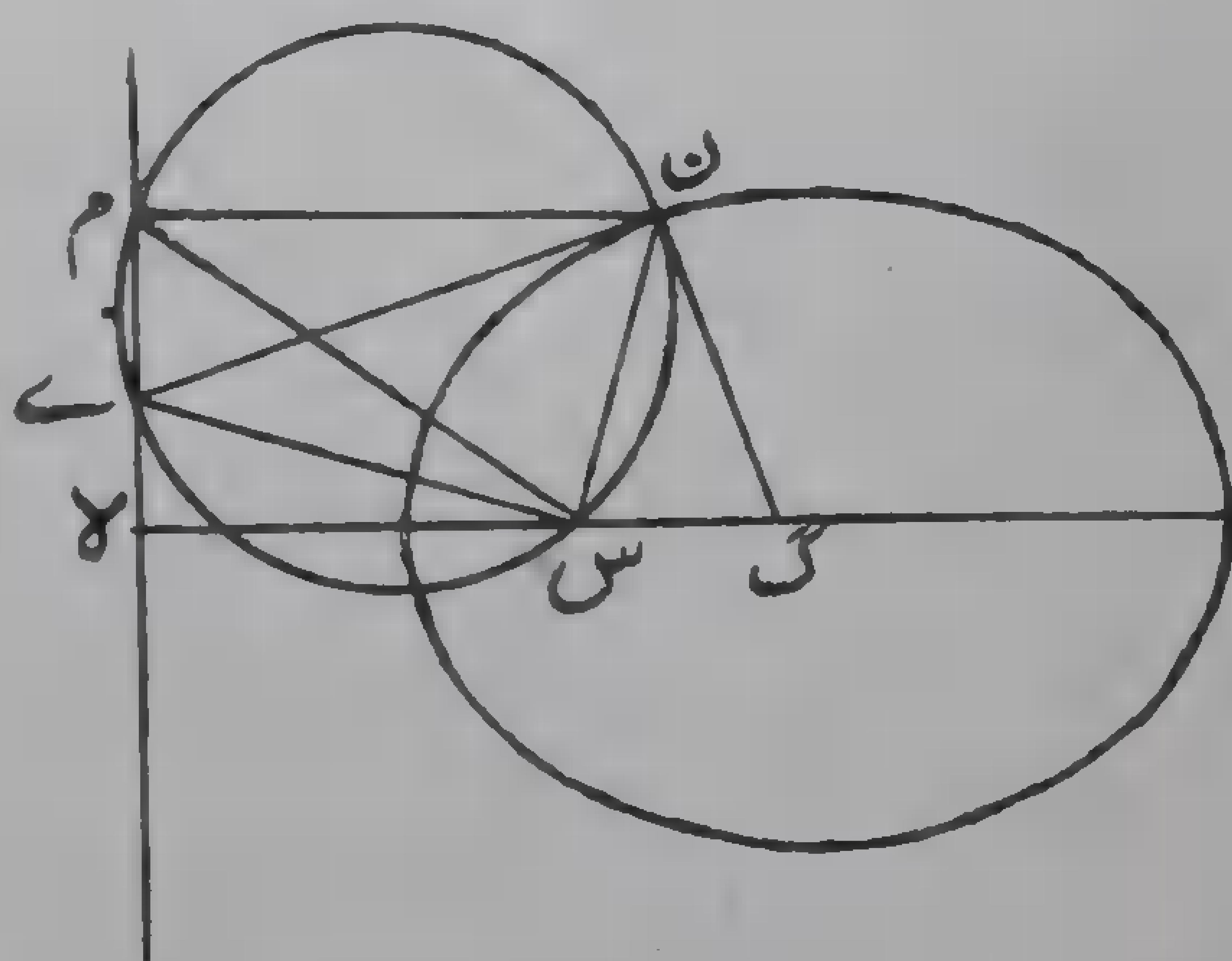
۴۔ نقطہ ب پر مماس کھینچنے سے ثابت کرو کہ

ج س × ج لا = ج اَ^۲

مسئلہ ۱۲

اگر ن پر کا عماد محور اعظم کو گ پر ملے تو ثابت کرو کہ

س گ = ر × س ن



مماس ن ے کھینچو، س ے کو ملاؤ، مرتب پر عمود ن م کھینچو اور س م کو ملاؤ

ے م ن اور ے س ن زاوئے قائمے ہیں [مسئلہ ۱۱

اس لئے اگر ے ن کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا جائے تو یہ م اور س میں سے گذریگا [اقلیدس م ۳ شں ۲۱

چونکہ ے ن گ زاویہ قائمہ ہے اس لئے ن گ دائرہ کو مس کرتا ہے [اقلیدس م ۳ شں ۱۶

اس لئے زاویہ س ن گ = زاویہ س م ن جو

دائرہ کے متبادل قطعہ میں واقع ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳۲]
نیز زاویہ ن س گ = زاویہ س ن م [اقلیدس م ۱ ش ۲۹]
اس لئے مثلث س ن گ اور ن م س تشابہ ہیں
∴ س گ : س ن = س ن : ن م
∴ س گ = ر × س ن

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۲

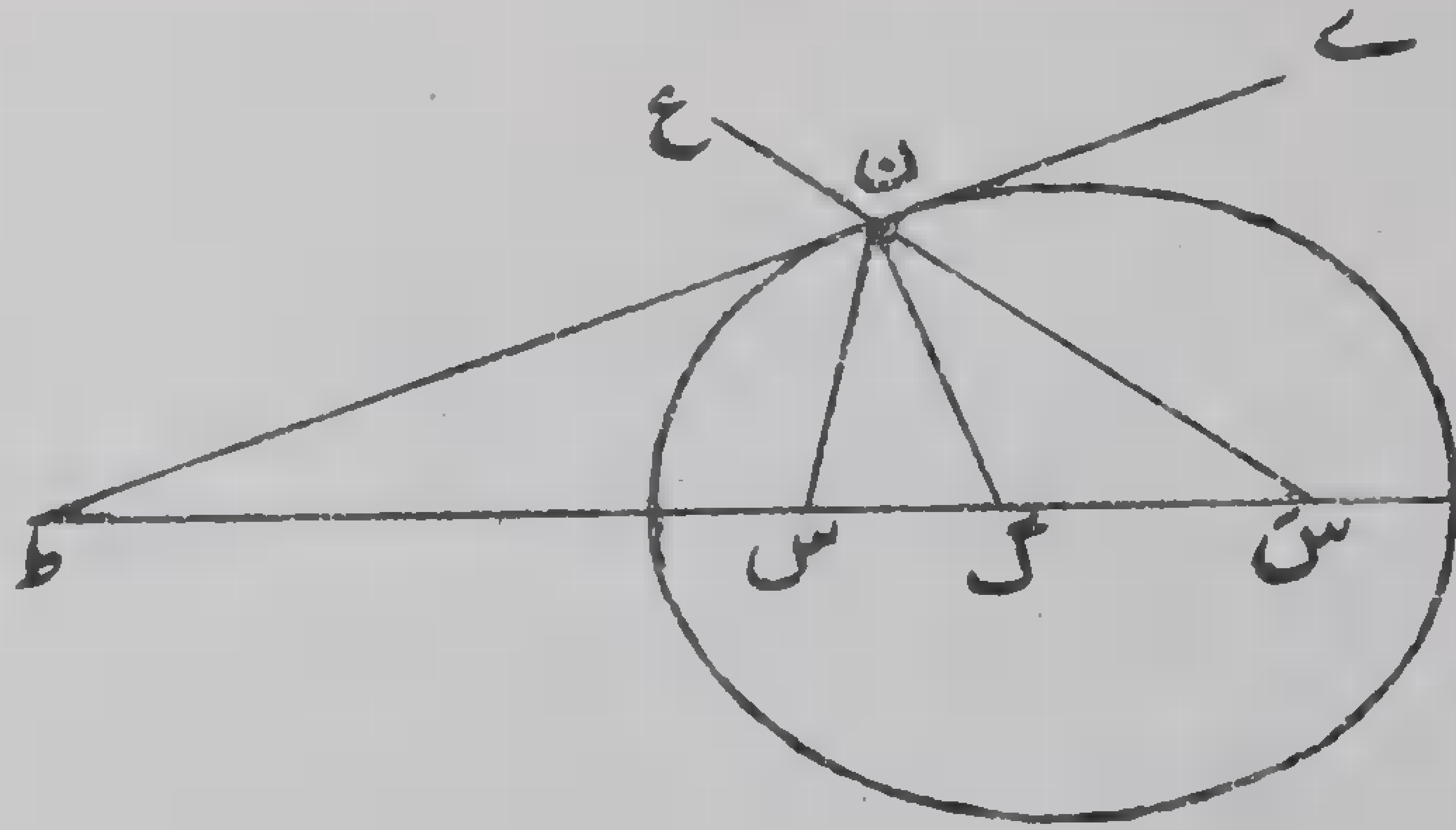
۱۔ ہلیلجی پر کوئی نقطہ ن ہے اور محور اعظم پر ایک ثابت نقطہ م ہے، اگر م سے ن پر کے مماس پر ایک عمود کھینچا جائے تو جس نقطہ پر یہ عمود سمتی قطر س ن کو ملتا ہے اس کا طریق دریافت کرو۔

۲۔ اگر گ د، س ن پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ نسبت ن ل : گ د مستقل ہے اور ن د = نیم وتر خاص

۳۔ اگر ن گ ممدودہ محور اصغر کو گ، پر ملے تو گ، س ممدودہ مرتب کو م پر ملیگا جہاں م پائین اس عمود کا ہے جو نقطہ ن سے مرتب پر نکالا جائے

مسئلہ ۱۳

ہلیلجی کے کسی نقطہ ن پر کے مماس اور عماد ماسکی فاصلوں کے درمیانی زاویہ کے بالترتیب خارجی اور داخلی منصّف ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ط ن ے مماس ہے اور ن گ عماد،

س گ = ر × س ن [مسئلہ ۱۲]

سَ گ = ر × سَ ن

اس لئے س گ : سَ گ = س ن : سَ ن

اس لئے ثابت ہوا کہ ن گ زاویہ س ن سَ کی تنصیف کرتا ہے [اقلیدس م ۶ شش ۳]

اس لئے ان زاویوں کے متمم زاوئے س ن ط اور سَ ن ے مساوی ہیں لیکن زاویہ سَ ن ے = زاویہ ع ن ط

اس لئے ن ط خارجی زاویہ س ن ع کی تنصیف کرتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۳

۱۔ اگر ن پر کے مماس پر عمود س ما نکالا جائے اور یہ

عمود، سَ ن ممدودہ کو سِ پر ملے تو ثابت کرو کہ (۱) سِ ما = سِ ما
(۲) سِ ن = ن سِ (۳) سَ سِ = ا اَ
اگر ن قطع ناقص پر حرکت کرے تو سِ کا طریق دریافت کرو
نوٹ۔ ربط (۱) کی وجہ سے سِ کو ماسکہ کا عکس بلحاظ مماس
کے کہتے ہیں

۲۔ مماس اور عماد محور اصغر کو بالترتیب نقاط طِ اور گِ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ اگر گِ طِ کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ نقطہ ن اور دونوں ماسکوں میں سے گذریگا

۳۔ اگر ن پر کا عماد محور اعظم کو گ پر اور اصغر کو گِ پر ملے تو ثابت کرو کہ مثلث س ن گ اور گِ ن سَ متشابہ ہیں

۴۔ س ن × سَ ن = ن گ × ن گِ

۵۔ ثابت کرو کہ قطع ناقص کے مرکز میں سے سوائے ان عمادوں کے جو محوروں کے سروں پر کھینچے جائیں اور کوئی عماد نہیں گذر سکتا۔

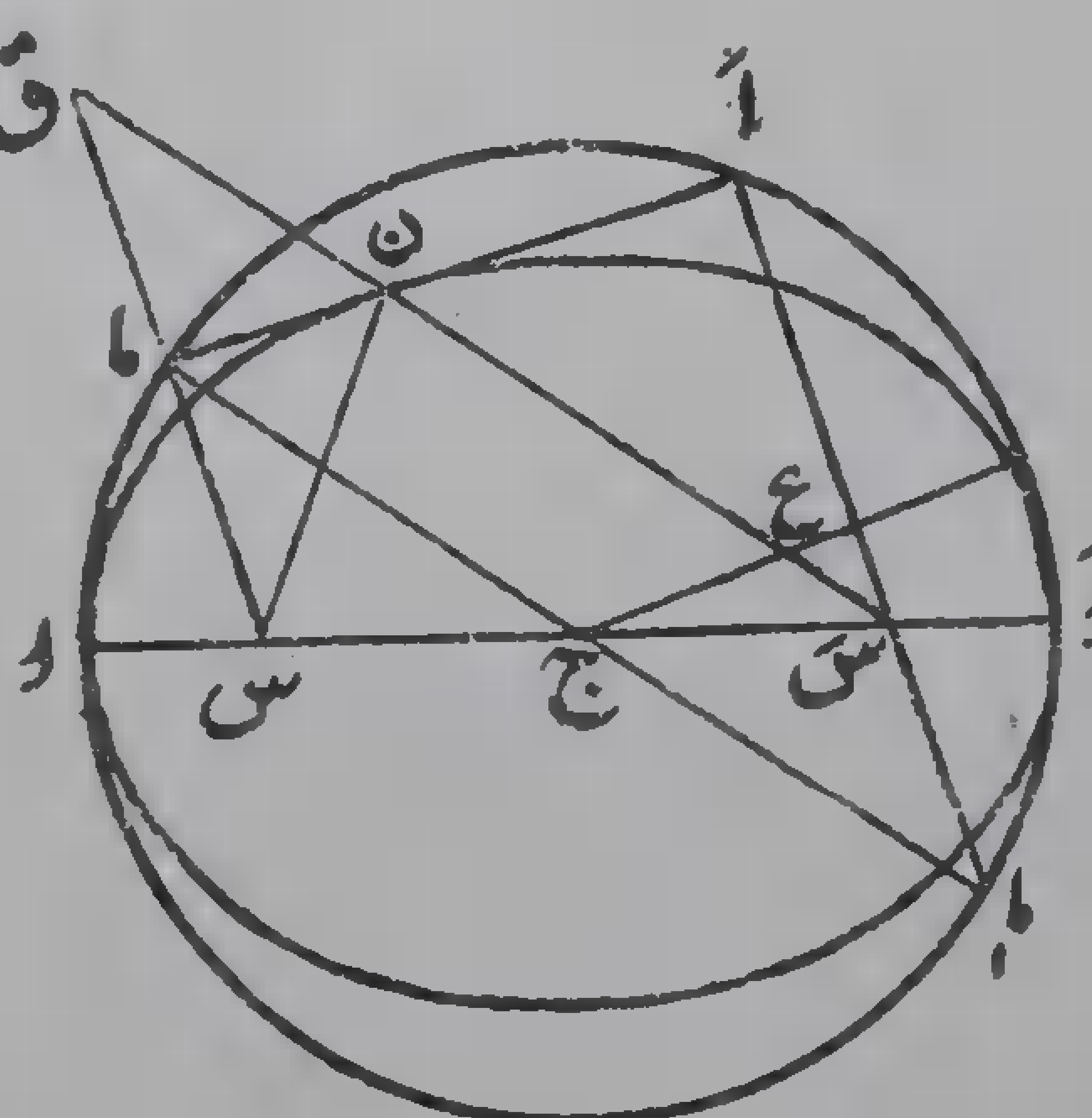
۶۔ ایک دائرہ قطع ناقص کے ماسکوں میں سے گذرتا ہے، دائرہ اور محور اصغر کے ایک نقطہ تقاطع میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو اس نقطہ کو دائرہ اور قطع ناقص کے نقطہ تقاطع سے وصل کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ خط قطع ناقص کو مس کرتا ہے

مسئلہ ۱۴

اگر قطع ناقص کے ماسکون سے ن پر کے مماس پر عمود (س ما، سَ مآ) کھینچے جائیں تو ان کے پائین امدادی دائرہ پر واقع ہوں گے

نیز اگر ج ع، ن پر کے مماس کے متوازی کھینچا جائے اور سَ ن کو نقطہ ع پر قطع کرے تو ن ع = ج ا

نیز س ما × سَ مآ = ج ب²



سَ ن اور س ما کو اتنا خارج کرو کہ وہ نقطہ ق پر ملیں، ج ما کو ملاؤ مثلثات مان س اور مان ق میں مان مشترک ہے، ن ماس اور ن ماق زاوے قائمے ہیں، زاویہ مان س = زاویہ مان ق [مسئلہ ۱۳]

∴ س ن = ن ق، س ما = ماق [اقلیدس م ا ش ۲۶]

اور س ج = ج سَ اس لئے سَ ق متوازی

ہے ج ما کے [اقلیدس م ۶ ش ۲]

∴ ج ما = ½ سَ ق [اقلیدس م ۶ ش ۴]

= ½ (سَ ن + ن س) = ½ اا َ [مسئلہ ۸]

= ج ا

اس لئے ما امدادی دائرہ پر واقع ہے

اسی طرح سے مَا بھی امدادی دائرہ پر واقع ہے

نیز ما ج ع ن ایک متوازی الاضلاع ہے اسلئے

ن ع = ج ما = ج ا

مَا سَ کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ کو ہا پر ملے،

ما ہا کو ملاؤ اب چونکہ ما مَا ہا زاویہ قائمہ ہے

اس لئے ما ہا مرکز ج میں سے گذرتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱]

س ما = سَ ہا [اقلیدس م ا ش ۴]

س ما × سَ مَا = سَ ہا × سَ مَا

= ا سَ × سَ اَ اقلیدس م ۳ ش ۳۵

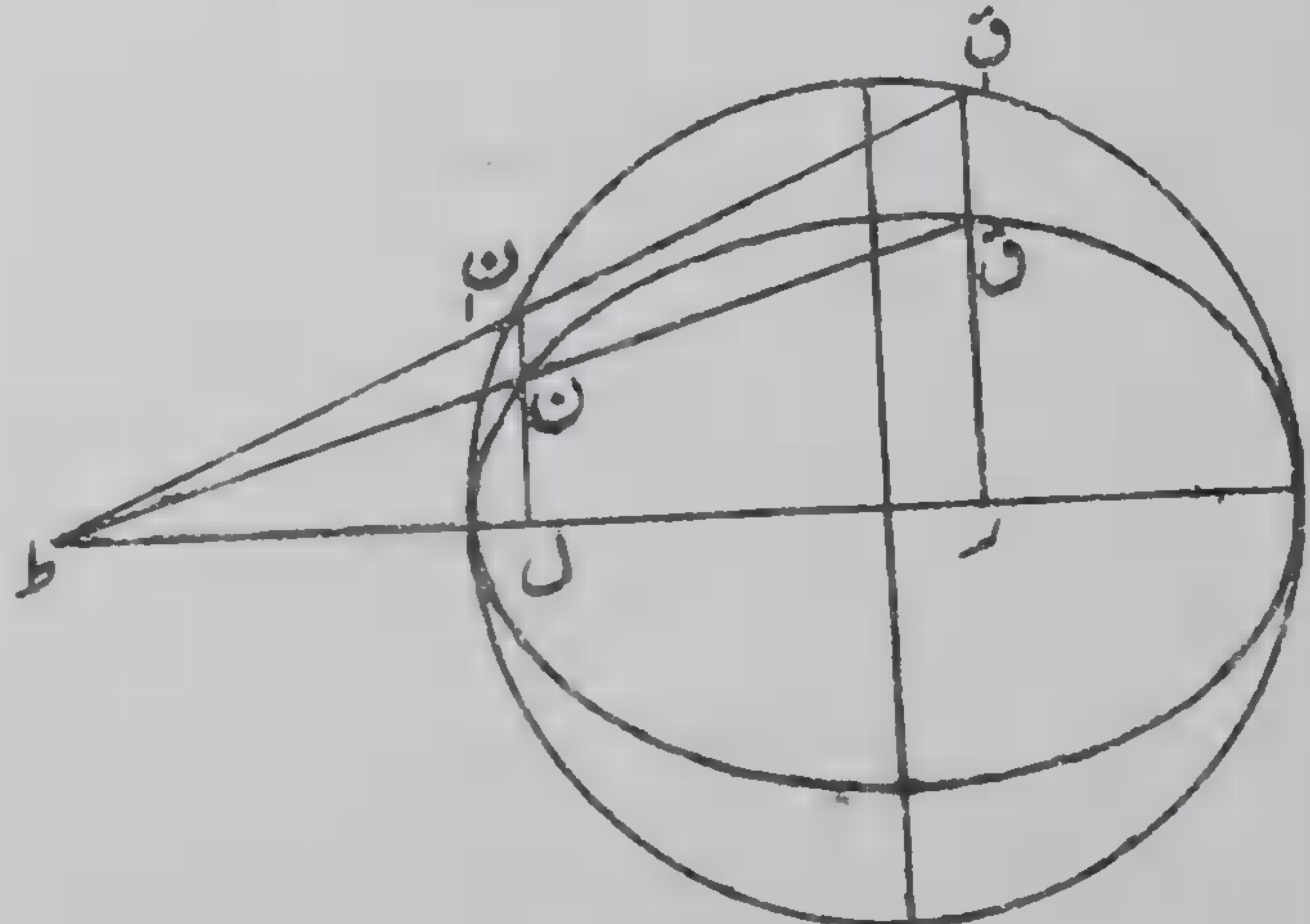
= ج ب² [مسئلہ ۹]

مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۸۱)

مسئلہ ۱۵

ثابت کرو کہ قطع ناقص اور امدادی دائرہ کے نظیری ممّاس ایک دوسرے کو محور اعظم پر قطع کرتے ہیں

نیز اگر نظیری نقطون پر مماس کھینچے جائیں تو وہ بھی ایکدوسرے کو محور اعظم پر قطع کریں گے۔



فرض کرو کہ قطع ناقص کا وتر ن ق محور اعظم کو نقطہ ط پر ملتا ہے

فرض کرو کہ امدادی دائرہ پر ن کا نظیری نقطہ ن۱ ہے۔ ط ن۱ کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ وہ معیّن ر ق ممدودہ کو ق۱ پر ملے

تب ق۱ ر : ن۱ ل = ر ط : ل ط [اقلیدس م۶ ش۴]

= ق ر : ن ل [اقلیدس م۶ ش۴]

∴ ق۱ ر : ق ر = ن۱ ل : ن ل

= اج : ب ج [مسئلہ ۴]

اس لئے ق۱ اور ق نظیری نقطے ہیں اور اسلئے معلوم ہوا کہ نظیری وتر ن ق، ن۱ ق۱ محور کو ایک

ہی نقطہ ط پر ملتے ہیں۔
اگر ق حرکت کرکے ن پر منطبق ہو جائے تو ق۱ حرکت کرکے ن۱ پر منطبق ہو جائے گا۔ اس وقت ن ط اور ن۱ ط بالترتیب قطع ناقص اور دائرہ کے مماس بنجائیں گے۔ پس معلوم ہوا کہ اگر نظیری نقطوں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے کو محور اعظم پر قطع کرینگے۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۵

۱۔ ن اور ن۱ نظیری نقطے ہیں، ن۱ پر کا مماس ج ب ممدودہ کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ک × ن ل = اج × ب ج

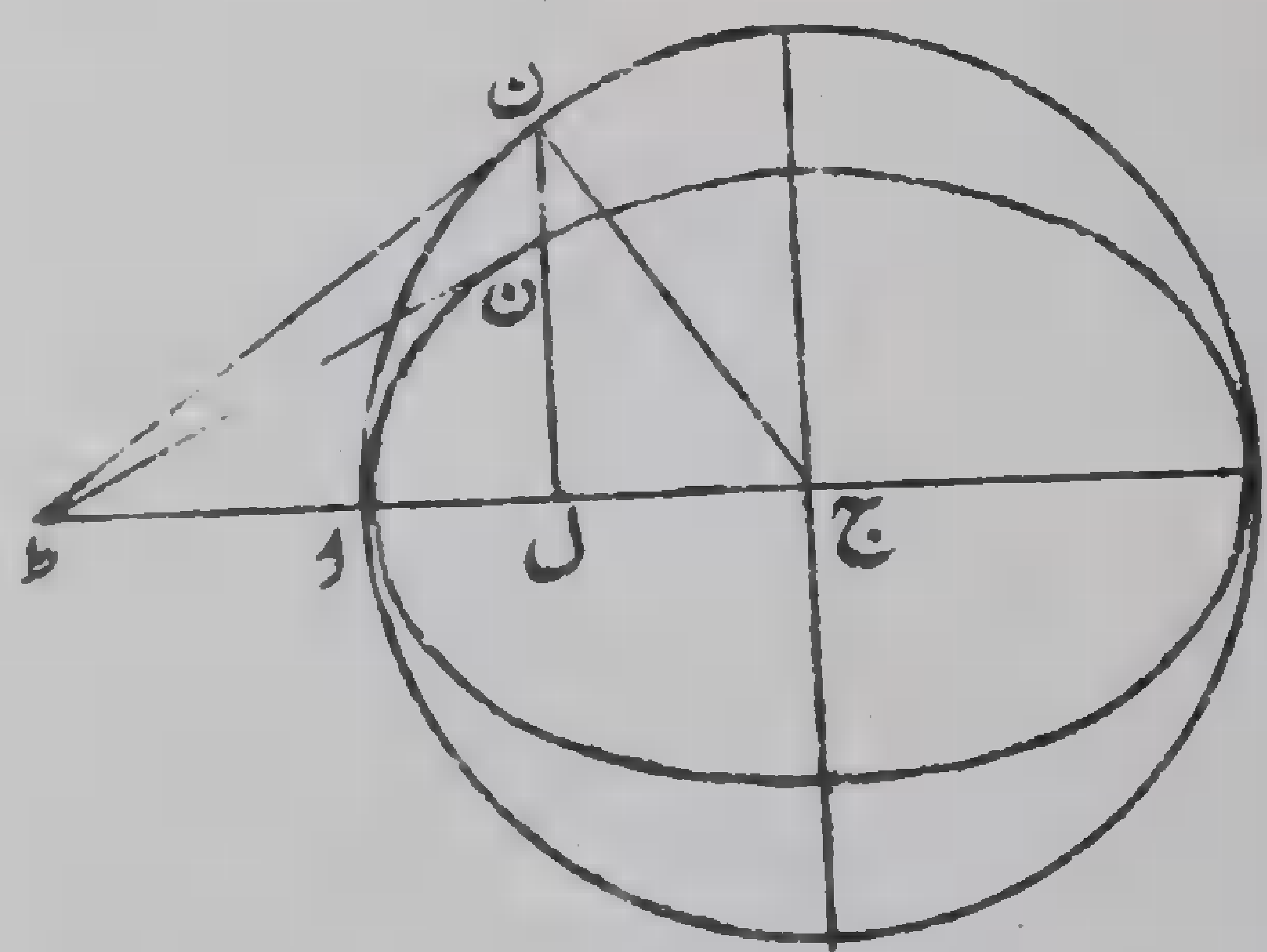
۲۔ وق اور وقَ قطع ناقص کے دو مماس ہیں اور و ل محور پر عمود ہے، ثابت کرو کہ اگر نظیری نقاط ق۱ اور قَ۱ پر امدادی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے کو و ل پر ملیں گے نیز ثابت کرو کہ اگر ق قَ ممدودہ محور اعظم کو ط پر ملے تو

ج ل × ج ط = ج ا^2

مسئلہ ۱۶

اگر ن پر کا مماس محور اعظم ممدودہ کو ط پر ملے تو

ج ل × ج ط = ج ا^2



ل ن کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ کو ن‌ا پر ملے اور ن‌ا ط، ن‌ا ج کو ملاؤ۔

ن‌ا ط دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۴]

اس لئے ج ن‌ا ط زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱۸]

∴ ج ل × ج ط = ج ن‌ا^۲ [اقلیدس م ۶ ش ۸]

= ج ا^۲

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

۱- ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے متوازی قطع ناقص کا مماس کھینچو۔

۲- اگر ج میں سے ایک مستقیم خط مماس کے متوازی کھینچا جائے اور وہ س ن اور سَ ن کو بالترتیب ع اور عَ پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ

ن ع = ن عَ

۳۔ ثابت کروکہ سَ ع = سَ عَ

۴۔ اگر س ن کو قطر مانکر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کروکہ وہ امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے۔

۵۔ س ک، سَ نَ کے متوازی ہے اور ماک، س ک پر عمود ہے، ثابت کروکہ جس مکافی کا ماسکہ س ہو اور راس ک، وہ قطع ناقص کو مس کرتا ہے۔

۶۔ قطع ناقص کے ماسکہ اور مماس کے مقام معلوم ہیں اور محور اصغر کا طول بھی دیا ہوا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق دریافت کرو؟

۷۔ اگر ایک دائرہ کے ایک وتر کے محاذی ایک نقطہ معینہ پر زاویہ قائمہ بنے تو ثابت کروکہ یہ وتر ایک ایسی مخروطی تراش کو لف کرتا ہے جس کا ایک ماسکہ نقطہ معینہ ہے اور دوسرا ماسکہ دائرہ کا مرکز ہے۔

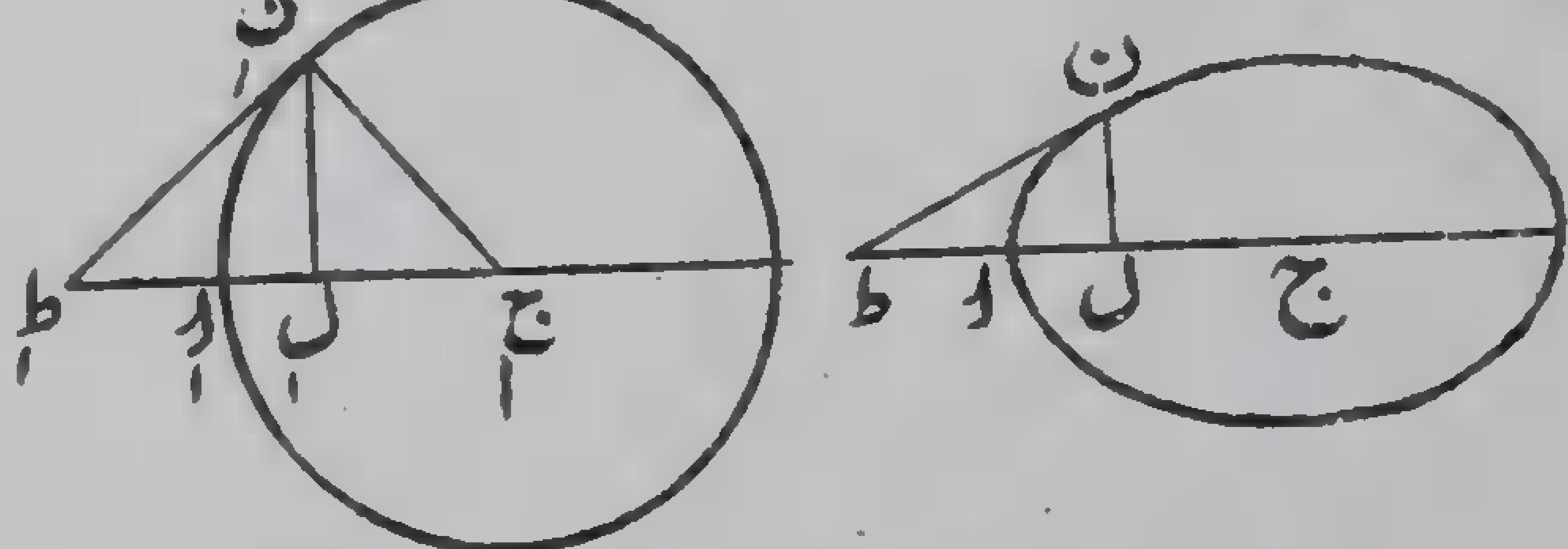
۸۔ اگر قطع ناقص کا ایک اور مماس، مان ماَ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرے اور نقطہ تقاطع و ہو تو ثابت کروکہ

$$\text{وما} \times \text{وماَ} = \text{ب ج}^2$$

اس لئے ثابت کروکہ $\text{ج و}^2 = \text{ج اَ}^2 + \text{ج ب}^2$

[قطع ناقص کے جو مماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کریں ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہوتا ہے جس کو مرتب دائرہ کہتے ہیں۔]

مسئلہ ۱۶ (متبادل ثبوت)



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل بنانے سے قطع ناقص حاصل ہوا ہے اور فرض کرو کہ

ج١، ن١، ط١، ل١، د١ کے ظل ج، ن، ط، ل، د ہیں۔

اب ن١ ط١ دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ د]

اسلئے ج١ ن١ ط١ زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱۸]

اور ج١ ل١ ن١ زاویہ قائمہ ہے [مسئلہ س]

∴ ج١ ل١ × ج١ ط١ = ج١ ن١^۲ [اقلیدس م ۶ ش ۸]

∴ ج١ ل١ × ج١ ط١ = ج١ د١^۲

∴ ج ل × ج ط = ج د^۲ [مسئلہ ب]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۶

۱۔ امدادی دائرہ پر ن کا نظیری نقطہ ن١ ہے، ن١ پر کے مماس پر عمود س ھ١ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ

س ط۱ = س ن

۲۔ ثابت کرو کہ کوئی دائرہ جو ل اور ط میں سے گذرتا ہے امدادی دائرہ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے۔

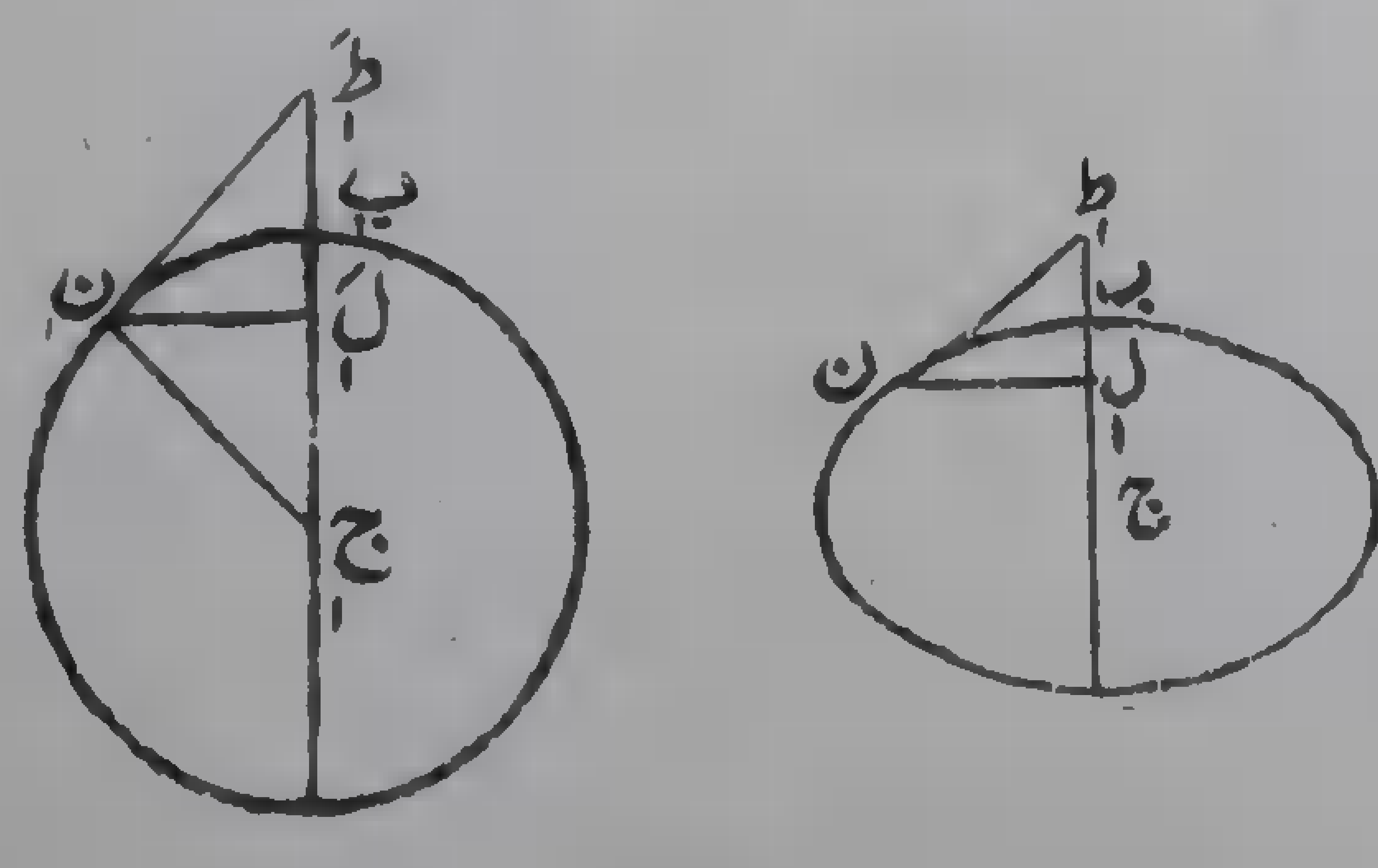
۳۔ اگر قطع ناقص کے کسی نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے اور اس پر مرکز اور محور اعظم کے ایک سرے سے عمود ج ما اور ا ے نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ

ج ا × ا ے = ج ما × ا ل

مسئلہ ۱۷

اگر ن پر کا مماس محور اصغر ممدودہ کو ط۱ پر ملے اور نقطہ ن سے محور اصغر پر عمود ن ل۱ نکالا جائے تو ثابت کرو کہ

ج ن۱ × ج ط۱ = ج ب²



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو۔ اور فرض کرو کہ نقاط ج، ن۱، ط۱، ب، ل۱ کے ظل

ج، ن، ط۱، ب، ل۱ ہیں۔

ج ن۱ کو ملاؤ، تب ن۱ ط۱ دائرہ کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۵]

اس لئے ج ن۱ ط۱ زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱۸]

نیز ج ل۱ ن۱ زاویہ قائمہ ہے [مسئلہ ین]

∴ ج ل۱ × ج ط۱ = ج ن۱^{2} [اقلیدس م ۶ ش ۸]

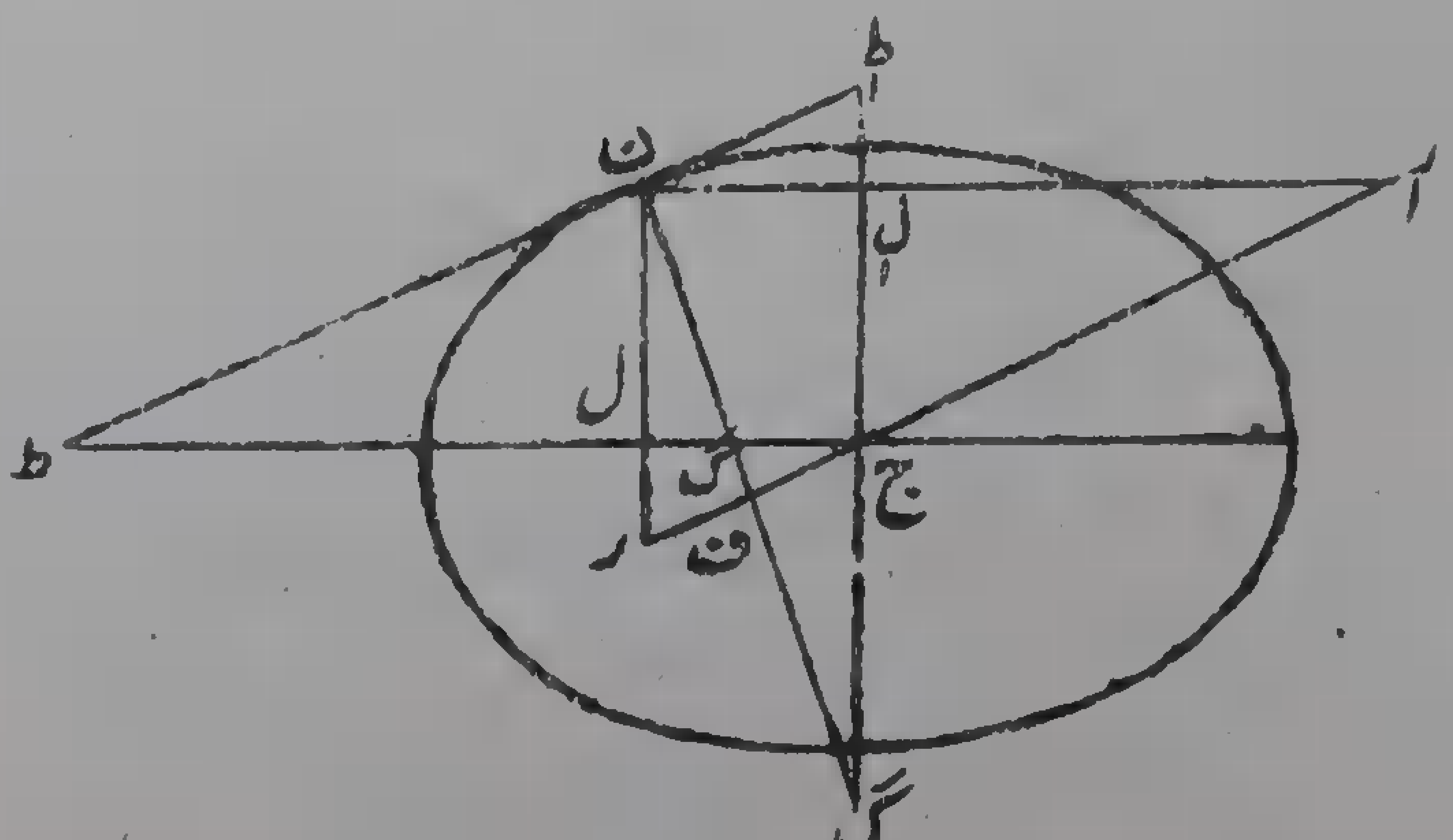
= ج ب۱^{2}

∴ ج ل۱ × ج ط۱ = ج ب^{2} [مسئلہ ب]

مسئلہ ۱۸

اگر قطع ناقص کے مرکز ج میں سے ن پر کے مماس کے متوازی ایک خط کھینچا جائے اور ن پر کا عماد اس خط کو نقطہ ف پر اور محور اصغر کو گ۱ پر ملے تو ثابت کرو کہ

ن ف × ن گ = ج ب^{2} اور ن ف × ن گ۱ = ج ا^{2}



محور ون پر عمود ن ل ر اور ن ل۱ ر۱ کھینچو اور فرض
کرو کہ وہ ج ف کو ر اور ر۱ پر ملتے ہیں نیز فرض
کرو کہ ن پر کا مماس محور ون کو ط اور ط۱ پر ملتا ہے
چونکہ ل اور ف پر کے زاوئے قائمے ہیں۔ اسلئے
گ ل ر اور ف کے گرد ایک دائرہ بن سکتا
ہے [اقلیدس م۳ ش۳۱]

∴ ن ف × ن گ = ن ل × ن ر [اقلیدس م۳ ش۳۶]

= ج ل۱ × ج ط۱ [اقلیدس م۱ ش۳۴]

= ج ب² [مسئلہ ۱۷]

اسی طرح سے ن ف × ن گ۱ = ن ل۱ × ن ر۱

= ج ل × ج ط [اقلیدس م۱ ش۳۴]

= ج ا²

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۸

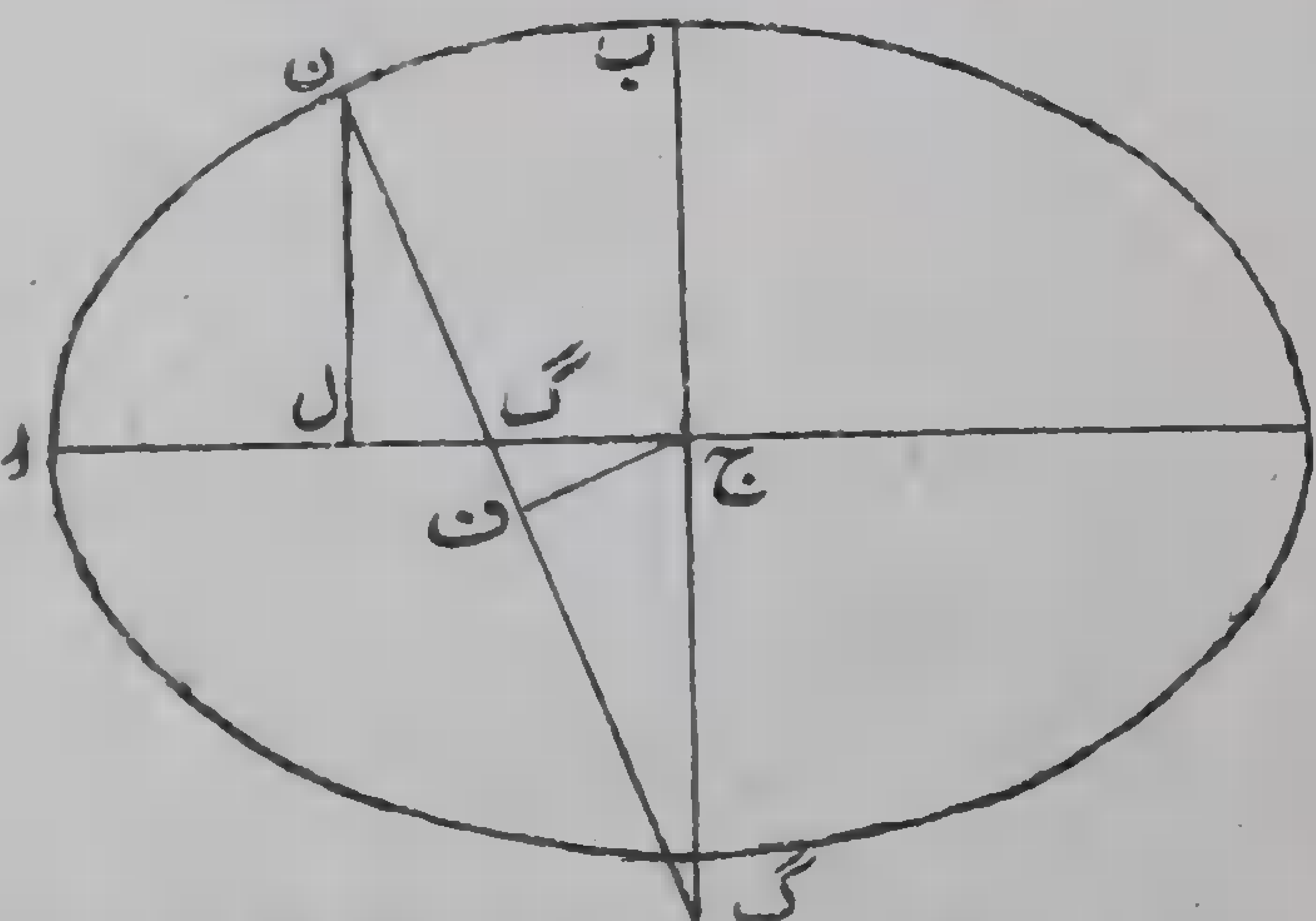
۱۔ اگر گ۱ سے س ن یا سَ ن ممدودہ پر ایک عمود
گ۱ ک نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ن ک = ج ل

۲۔ اگر ن پر کا مماس محور اعظم کو نقطہ ط پر ملے تو
ج ف × ن ط اُن عمودوں کے حاصل ضرب کے مساوی
ہوگا جو ماسکوں سے ن پر کے عماد پر نکالے جائیں۔

مسئلہ ۱۹

گ ل : ج ل = ج ب^۲ : ج ا^۲

نیز ج گ = ا^۲ × ج ل



ن گ کو اتنا خارج کرو کہ وہ محور اصغر کو گ۱ پر ملے اور ج ف کو ن پر کے مماس کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ن گ۱ کو ف پر ملتا ہے۔

تب گ ل : ج ل = ن گ : ن گ۱ [اقلیدس م ۶ ش ۲]

= ن ف × ن گ : ن ف × ن گ۱

= ج ب^۲ : ج ا^۲ [مسئلہ ۱۸]

نیز ج ل - گ ل : ج ل = ج ا^۲ - ج ب^۲ : ج ا^۲

∴ ج گ : ج ل = ج س^۲ : ج ا^۲ [مسئلہ ۹]

∴ ج گ = ا^۲ × ج ل [مسئلہ ۷]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۹

۱۔ اگر ن پر کا مماس اور عماد محور اعظم اور محور اصغر کو بالترتیب نقاط ط، ط۱، گ، گ۱ پر ملیں تو ثابت کرو کہ

(۱) ج گ × ج ط = ج س۲

(۲) ج گ × ج ط۱ = ج س۲

(۳) ط گ۱ اور ط۱ گ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں

۲۔ ثابت کرو کہ ل گ × ج ط = ج ب۲

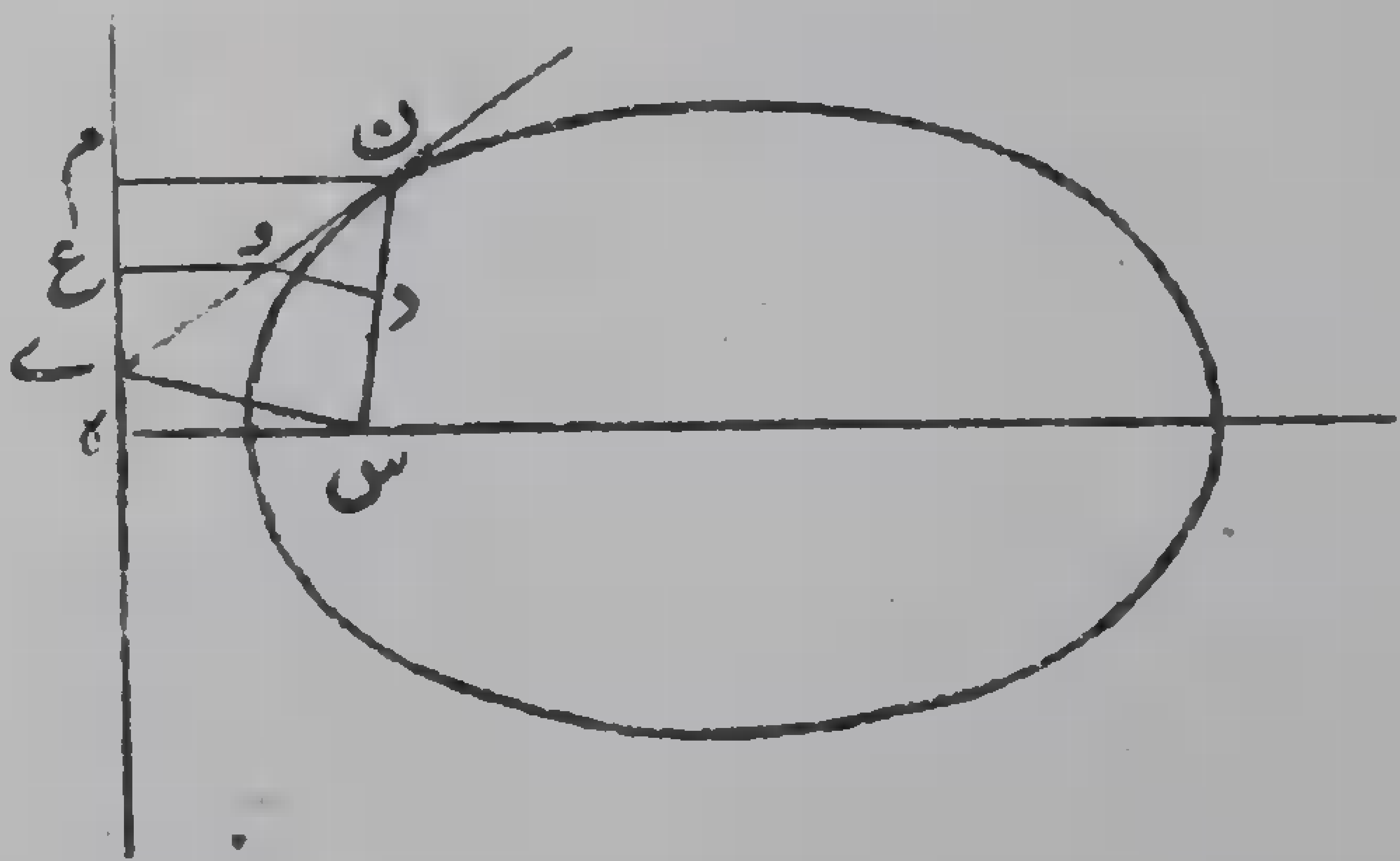
۳۔ اس مسئلہ سے قطع مکافی کے لئے ایک متماثل مسئلہ مستنبط کرو یعنی ثابت کرو کہ ل گ = ۲ ا س

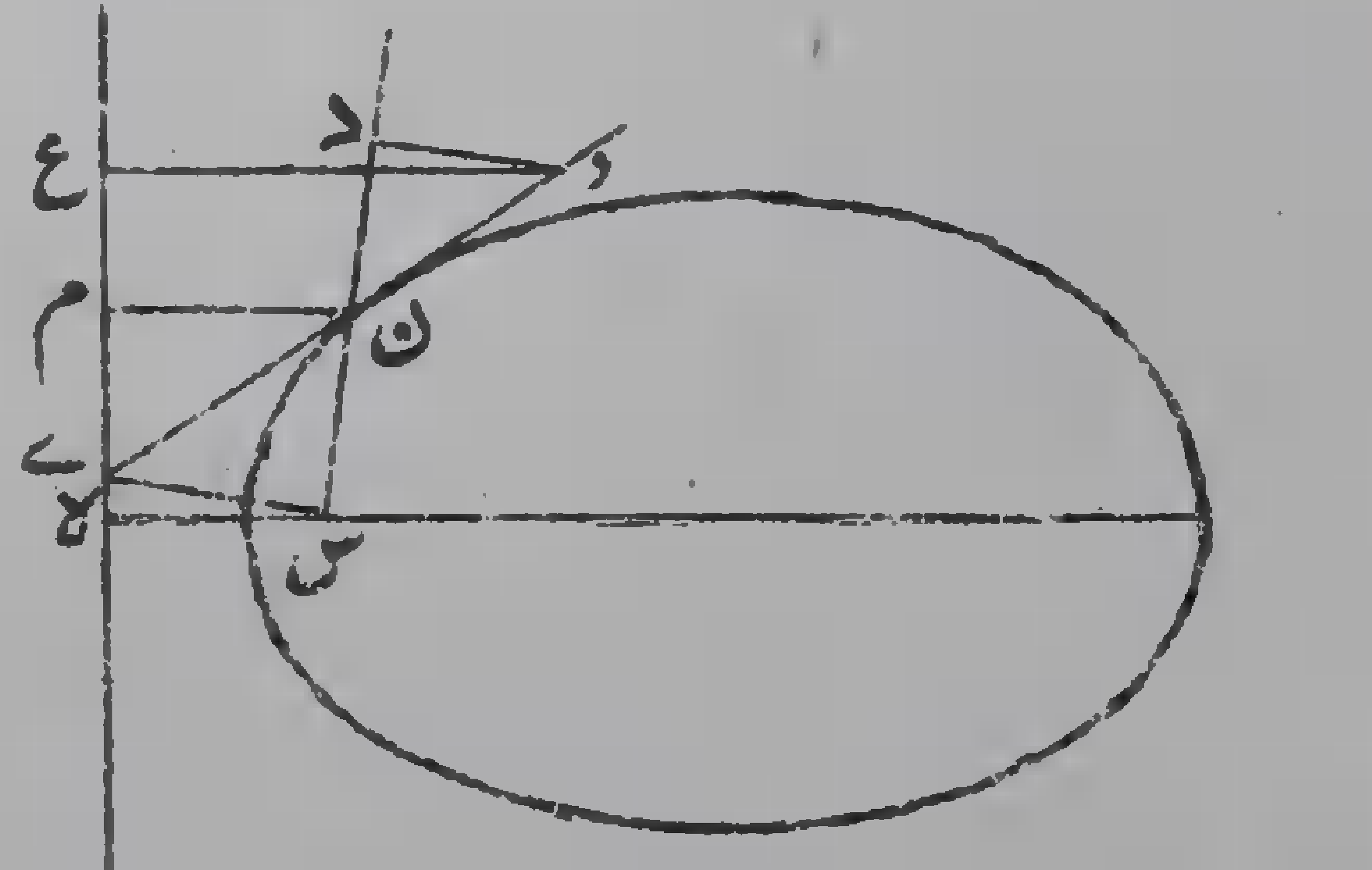
۴۔ قطع ناقص پر ایک ایسا نقطہ ن دریافت کرو کہ ن گ خطوط ج ن اور ن ل کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرے۔

مسئلہ ۲۰

اگر قطع ناقص کے ایک نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے اور مماس پر کے کسی نقطہ و سے مرتب پر عمود و ع اور س ن پر عمود و د نکالا جائے تو ثابت کرو کہ س د = ر × و ع

[اس خاصیت کو انگریزی مہندس آدم سے منسوب کرتے ہیں]





س ے کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م کھینچو

زاویہ ے س ن قائمہ ہے [مسئلہ ۱۱]

∴ ے س ، و د کے متوازی ہے

∴ س د : س ن = ے و : ے ن [اقلیدس م ۶ ش ۲]

= و ع : ن م [اقلیدس م ۶ ش ۴]

لیکن س ن = ر × ن م

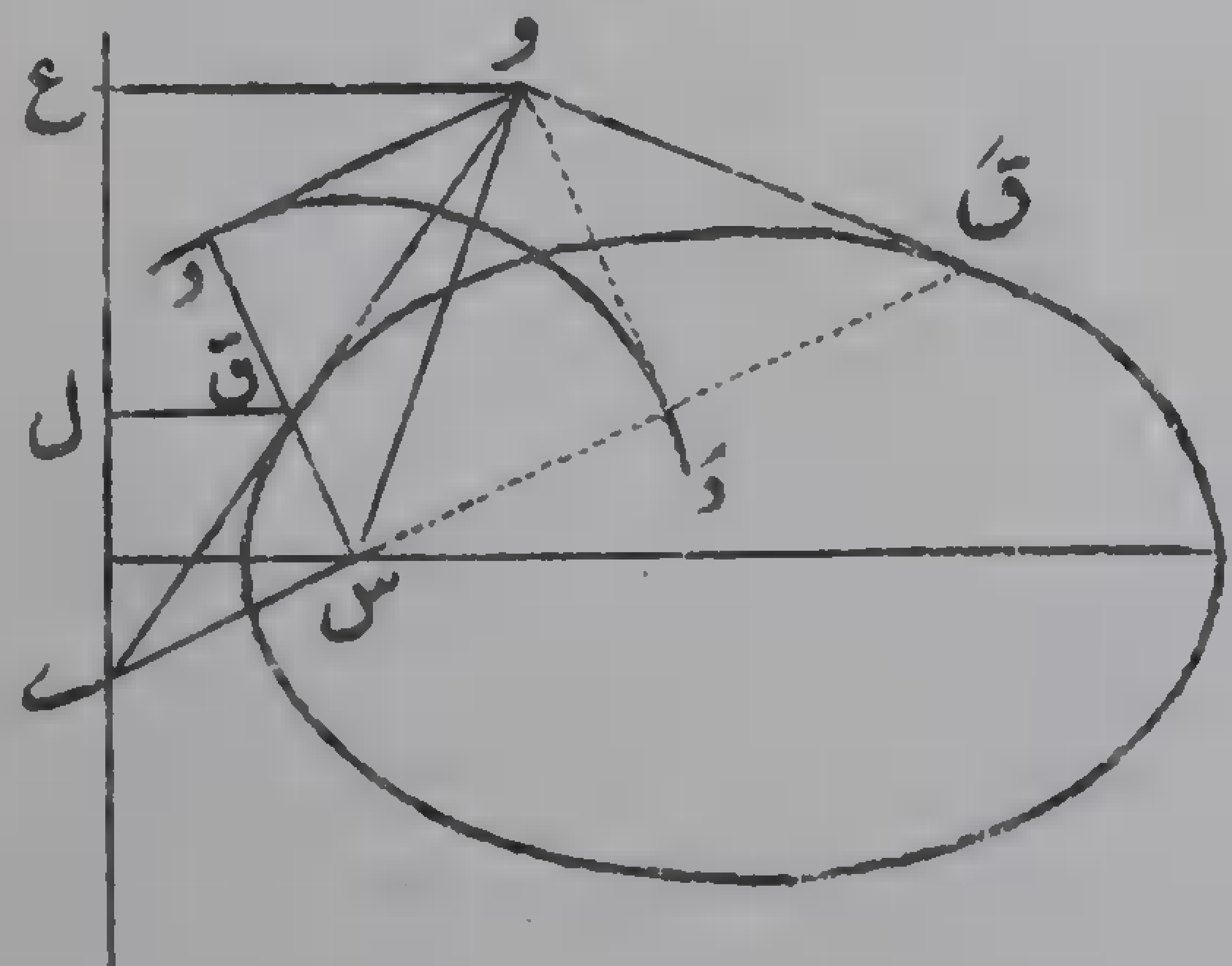
∴ س د = ر × و ع

اگر ن پر کا مماس مرتبوں کو ے اور ے پر ملے اور نقاط

ہے اور ےَ سے س ن پر عمود نکالے جائیں تو انکے پائیں کا درمیانی فاصلہ ا اَ کے مساوی ہوگا۔

مسئلہ ۲۱

ایک نقطہ بیرونی و سے قطع ناقص کے دو مماس وق اور وقَ کھینچو



مرتب پر عمود و ع نکالو
س کو مرکز اور ر × و ع کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ بناؤ اور اس کے مماس ود اور ودَ کھینچو [اقلیدس م ۳ ش ۱۷]
س د پر عمود س سے قائم کرو جو مرتب کو ے پر ملے، ے و کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ س د کو ق پر ملتا ہے

مرتب پر عمود ق ل نکالو

تب س ق : س د = ق ے : و ے [اقلیدس م ۶ ش ۲]

= ق ل : و ع

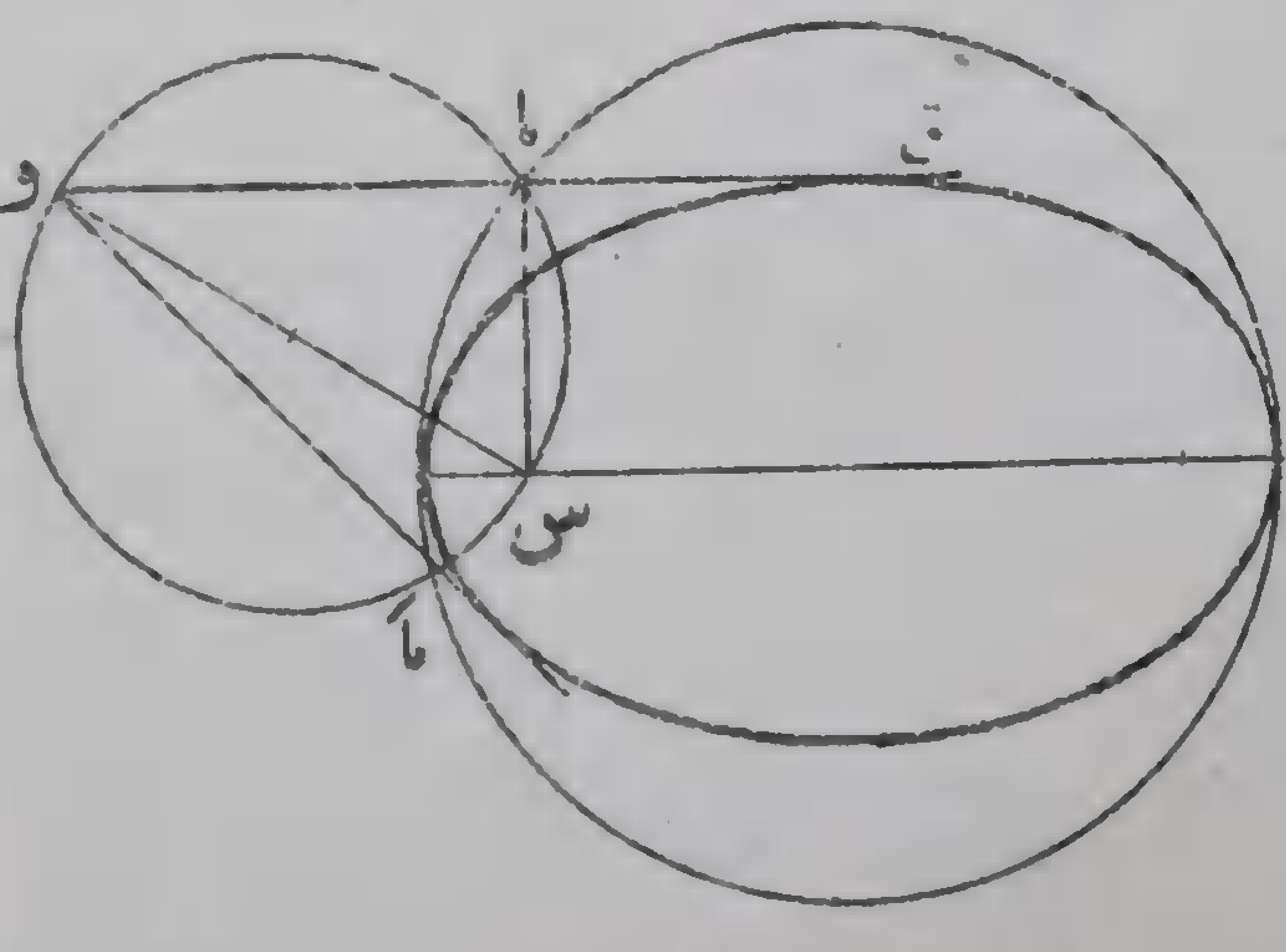
∴ س ق : ق ل = س د : و ع

= ل : ا

اس لئے نقطہ ق قطع ناقص پر واقع ہے۔

اور چونکہ زاویہ ق س ے قائمہ ہے اسلئے و ق قطع ناقص کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۱]

اسی طرح سے دوسرا مماس د قَ کھینچا جا سکتا ہے۔

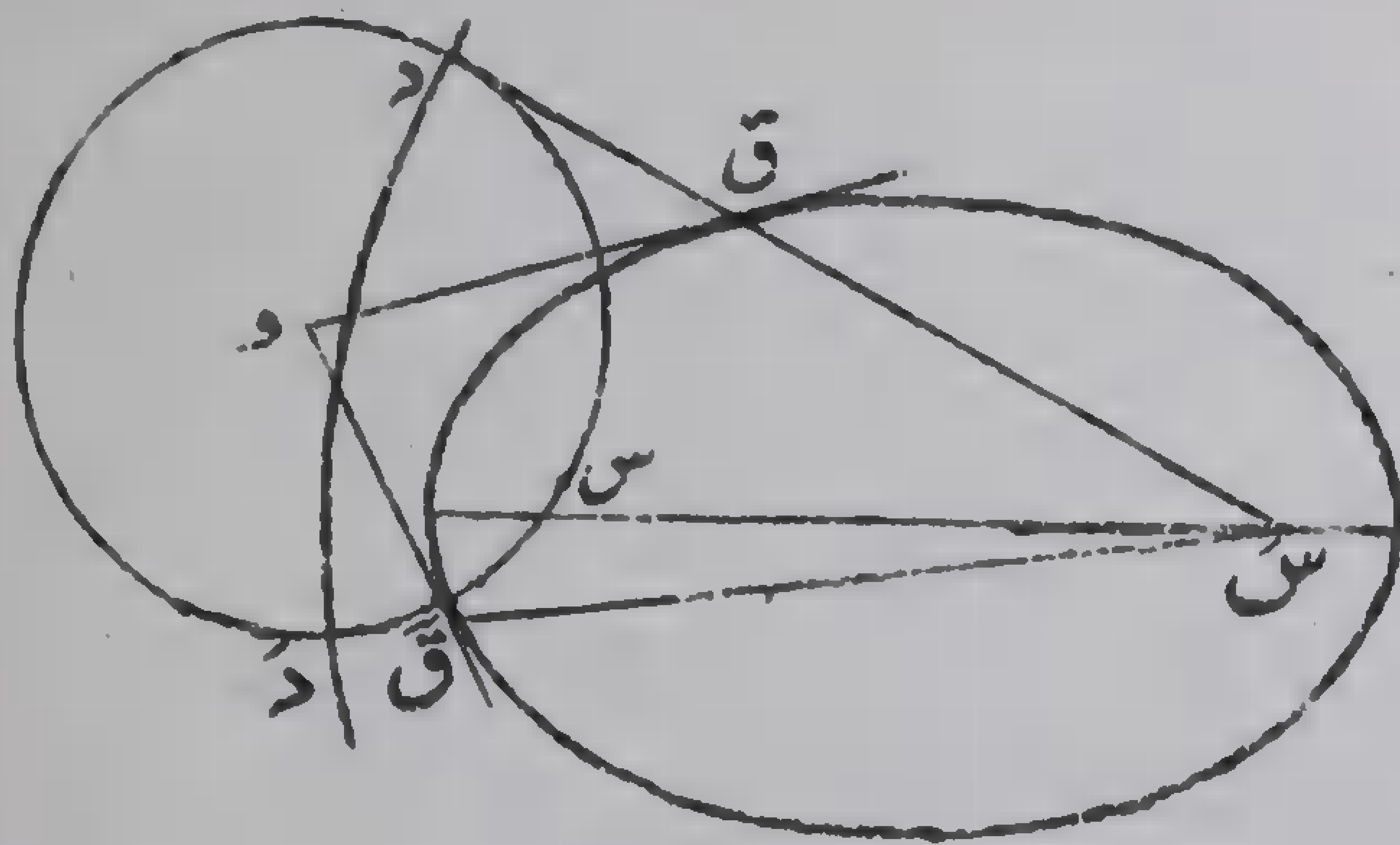


دوسرا طریقہ و س کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو جو امدادی دائرہ کو نقاط ما اور مَا پر ملے،

تب زاویہ س ما و قائمہ ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳۱]

اور و ما قطع ناقص کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۴]

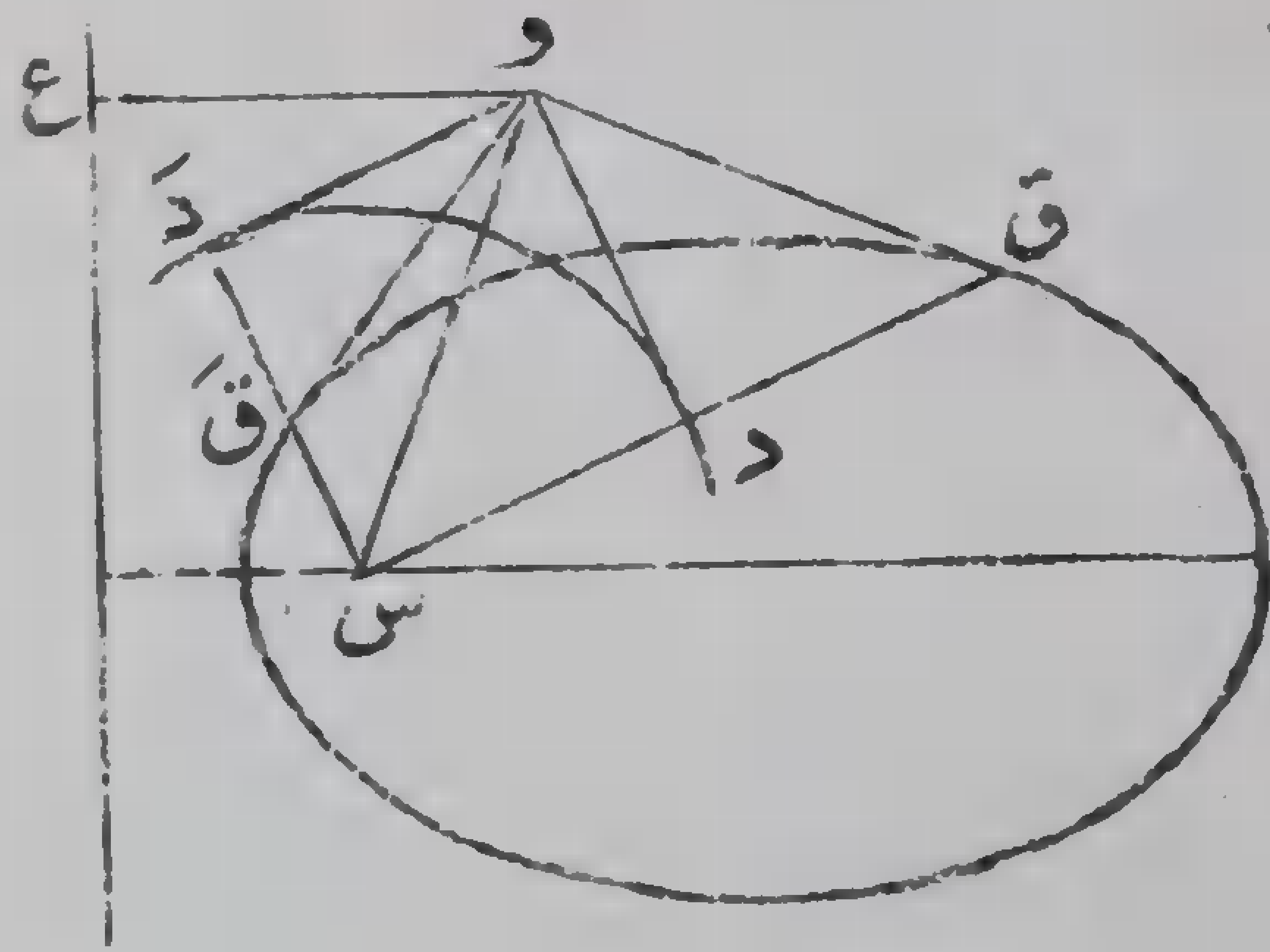
اسی طرح سے وقَ ناقص کو مس کرتا ہے



تیسرا طریقہ و کو مرکز اور وس کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو اور سَ کو مرکز اور اا َ کو نصف قطر مان کر ایک اور دائرہ کھینچو جو پہلے دائرہ کو نقاط د اور دَ پر قطع کرے، سَ د اور سَ دَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ قطع ناقص کو نقاط ق اور قَ پر ملتے ہیں تب زاویہ وق د = زاویہ وق س [اقلیدس ا ش ۸] اس لئے وق قطع ناقص کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۱۳]
اسی طرح سے وقَ ناقص کو مس کرتا ہے

مسئلہ ۲۲

ثابت کرو کہ مماسات وق اور وقَ کے محاذی ماسکہ س پر مساوی زاوے بنتے ہیں



س قَ ، س قَ اور مرتب پر بالترتیب عمود
ود ، ودَ اور وع کھینچو - وس کو ملاؤ

تب س د = ر × وع [مسئلہ ۲۰]
= س دَ [مسئلہ ۲۰]

اسلئے ود = ودَ [اقلیدس م اش ۴۷]

∴ زاویہ وس د = زاویہ وس دَ [اقلیدس م اش ۸]

یا زاویہ وس ق = زاویہ وس قَ

مشقی مثالین مسئلہ ۲۲

۱- ق قَ ممدودہ مرتب کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ
وس ک زاویہ قائمہ ہے۔

۲- ایک ماسکی وتر کے سرون پر مماس کھینچے گئے ہیں اور
وہ راس پر کے مماس کو ط، طَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

ا ط × ا ط' = ا س'

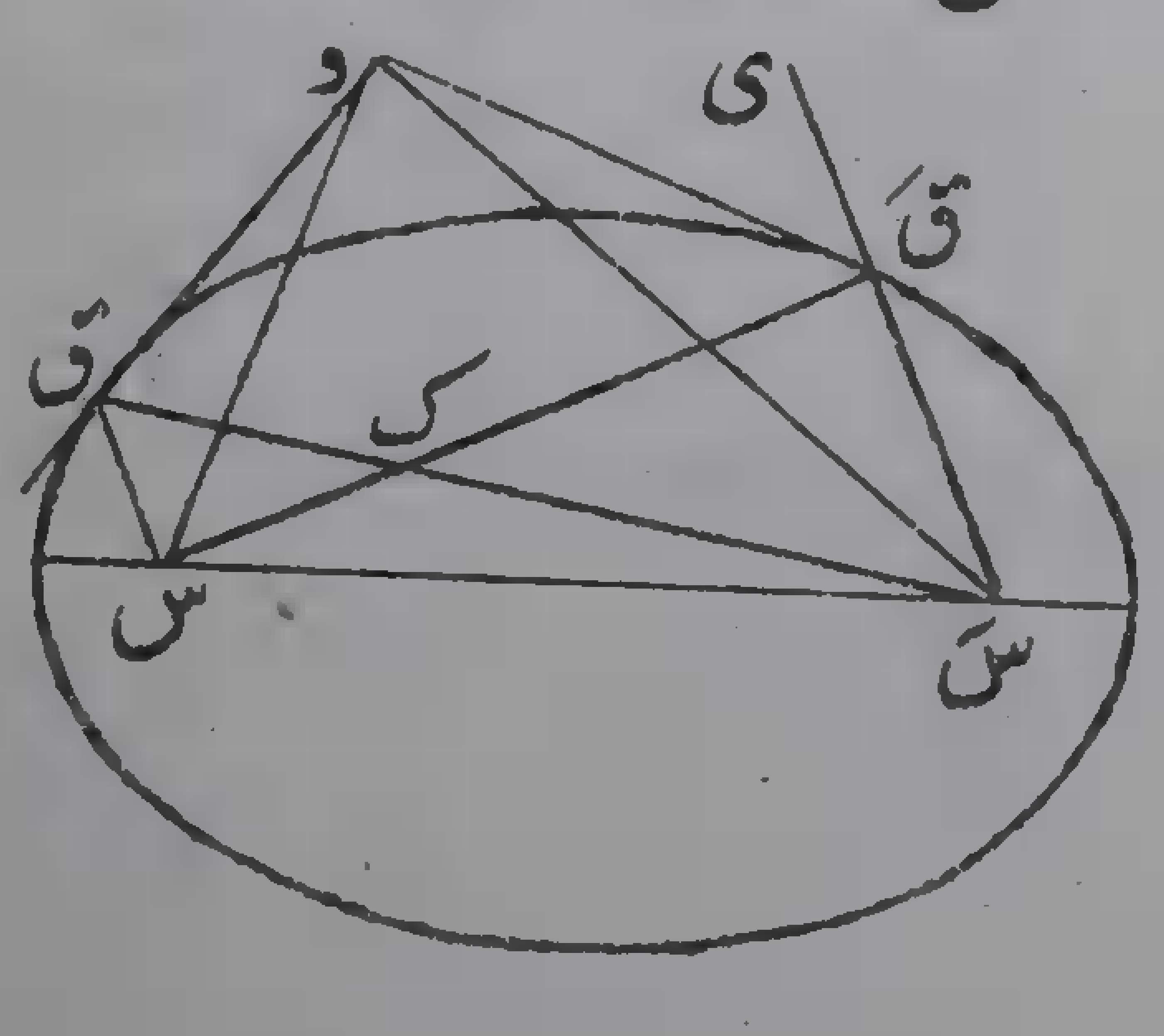
۳۔ و ق اور و قَ قطع ناقص کے دو ثابت مماس ہیں، ایک متغیر مماس انکو ق، قَ پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ زاویہ ق، س قَ مستقل ہے۔

۴۔ ایک ماسکی وتر کے سروں پر عماد اور مماس کھینچے گئے ہیں، عماد ایک دوسرے کو ی پر اور مماس ے پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ے ی دوسرے ماسکہ میں سے گذرتا ہے۔

۵۔ نقطہ و سے قطع ناقص کے دو مماس و ق اور و قَ کھینچے گئے ہیں، و س، ق قَ کو نقطہ ر پر ملتا ہے، محور کے متوازی خط ر سے کھینچا گیا ہے جو مرتب کو ے پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ق ے اور قَ ے محور سے مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

مسئلہ ۲۳

ایک قطع ناقص کے دو مماس و ق اور و قَ ہیں،



ثابت کرو کہ زاویہ س وق = زاویہ سَ وقَ
جہاں س اور سَ ماسکے ہیں
س ق ، س قَ ، سَ ق ، سَ قَ کو ملاؤ اور
سَ قَ کو ی تک خارج کرو اور فرض کرو کہ س قَ ،
سَ ق کو ک پر ملتا ہے۔
تب ∠ سَ وقَ = ∠ وقَ ی ۔ ∠ وسَ قَ [اقلیدس م اش ۳۲]

= ½ ∠ س قَ و ۔ ½ ∠ ق سَ قَ [مسئلہ ۱۳، ۲۰]

= ½ ∠ سَ ک قَ [اقلیدس م اش ۳۲]

اسی طرح سے ∠ س وق = ½ ∠ س ک ق

∴ ∠ س وق = ∠ سَ وقَ [اقلیدس م اش ۱۵]

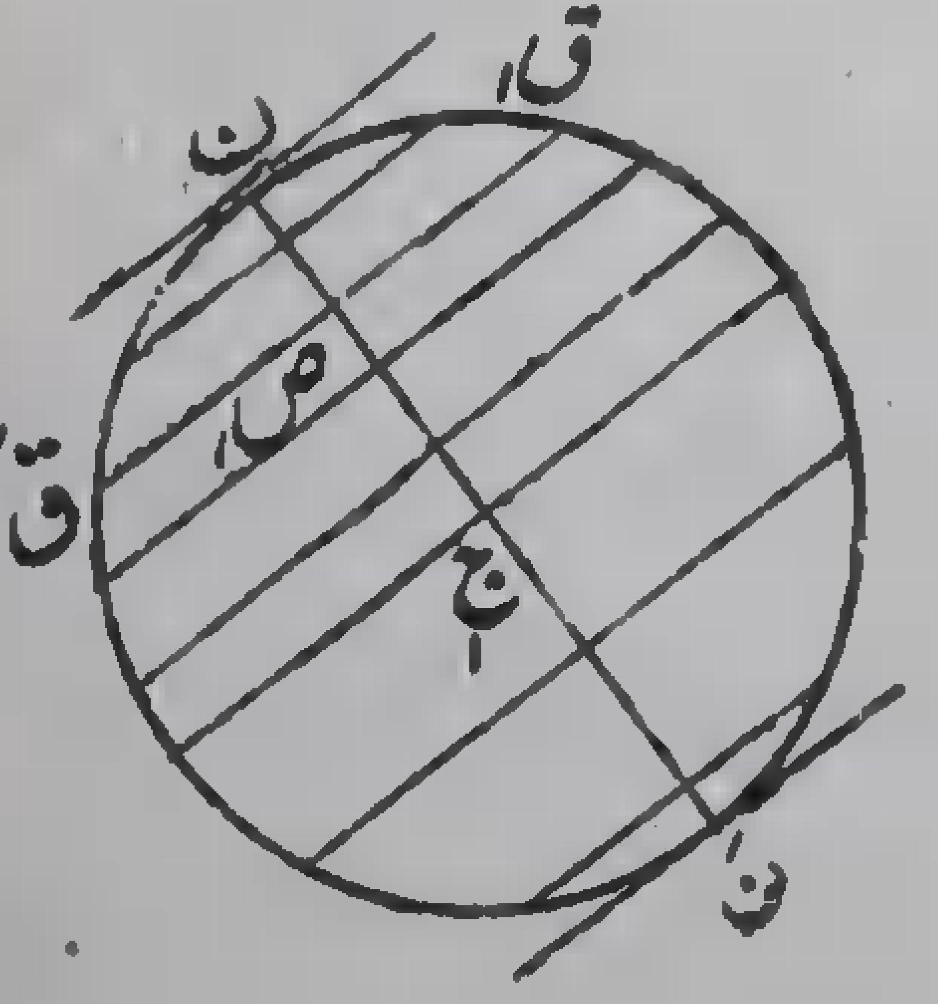
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۳

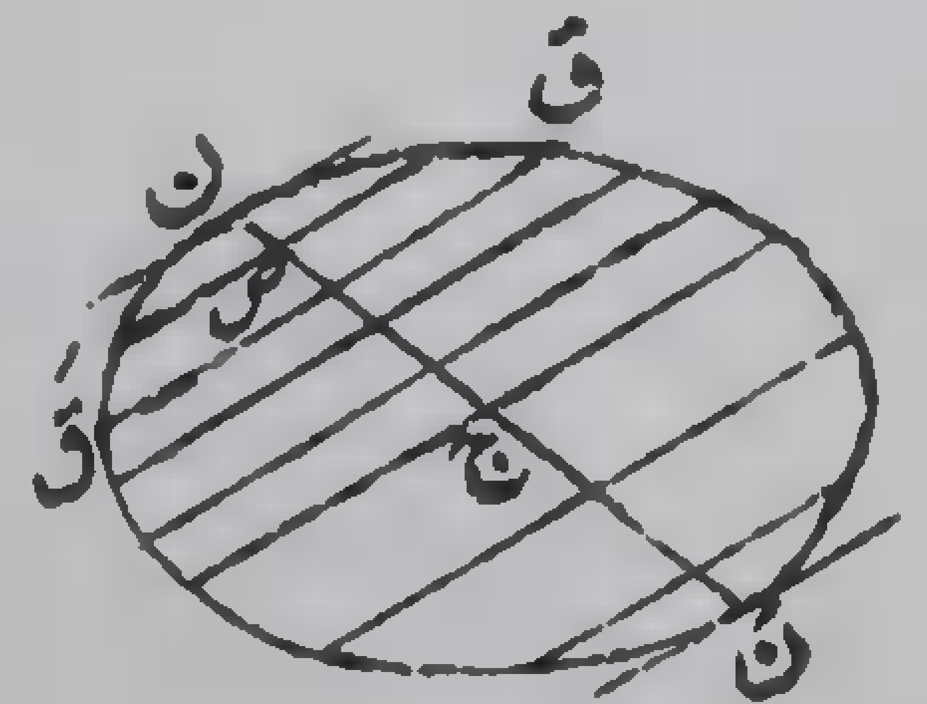
۱۔ قطع ناقص کا ایک ماسکہ اور دو مماس دئے ہوئے ہیں،
مرکز کا طریق دریافت کرو۔

۲۔ مماسات وق ، وقَ پر طول ور ، ورَ بالترتیب
مساوی وس ، وسَ کے قطع کئے گئے ہیں، ثابت
کرو کہ ررَ قطع ناقص کے محور اعظم کے مساوی
ہے۔

مسئلہ ۲۴

ایک قطع ناقص کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا مستقیم خط ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر اس مستقیم خط کے کسی ایک سرے پر مماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے متوازی ہوگا





وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہے، ناقص کے متوازی وتروں کا نظام دائرہ کے متوازی وتروں کے ایک نظام کا ظل ہے اور ناقص کے جو متوازی وتر ہیں ان کے وسطی نقاط دائرہ کے متوازی وتروں کے وسطی نقاط کے ظل ہیں۔

[مسائل ب اور ج]

دائرہ کی صورت میں یہ وسطی نقاط ایک ایسے مستقیم

خط ج، ص پر واقع ہیں جو مرکز ج، میں سے گذرتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳]

اور ج، ص، کا ظلّ ایک مستقیم خط ج ص ہے جو قطع ناقص کے مرکز ج میں سے گذرتا ہے [مسئلہ ۱]

دائرہ کی صورت میں اگر ج، ص، کے کسی ایک سرے پر مماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے متوازی ہوگا کیونکہ سب وتر ج، ص، پر عمود ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳ اور ۱۶]

پس قطع ناقص کی صورت میں بھی یہ خاصیت درست ہے [مسائل ج، د]

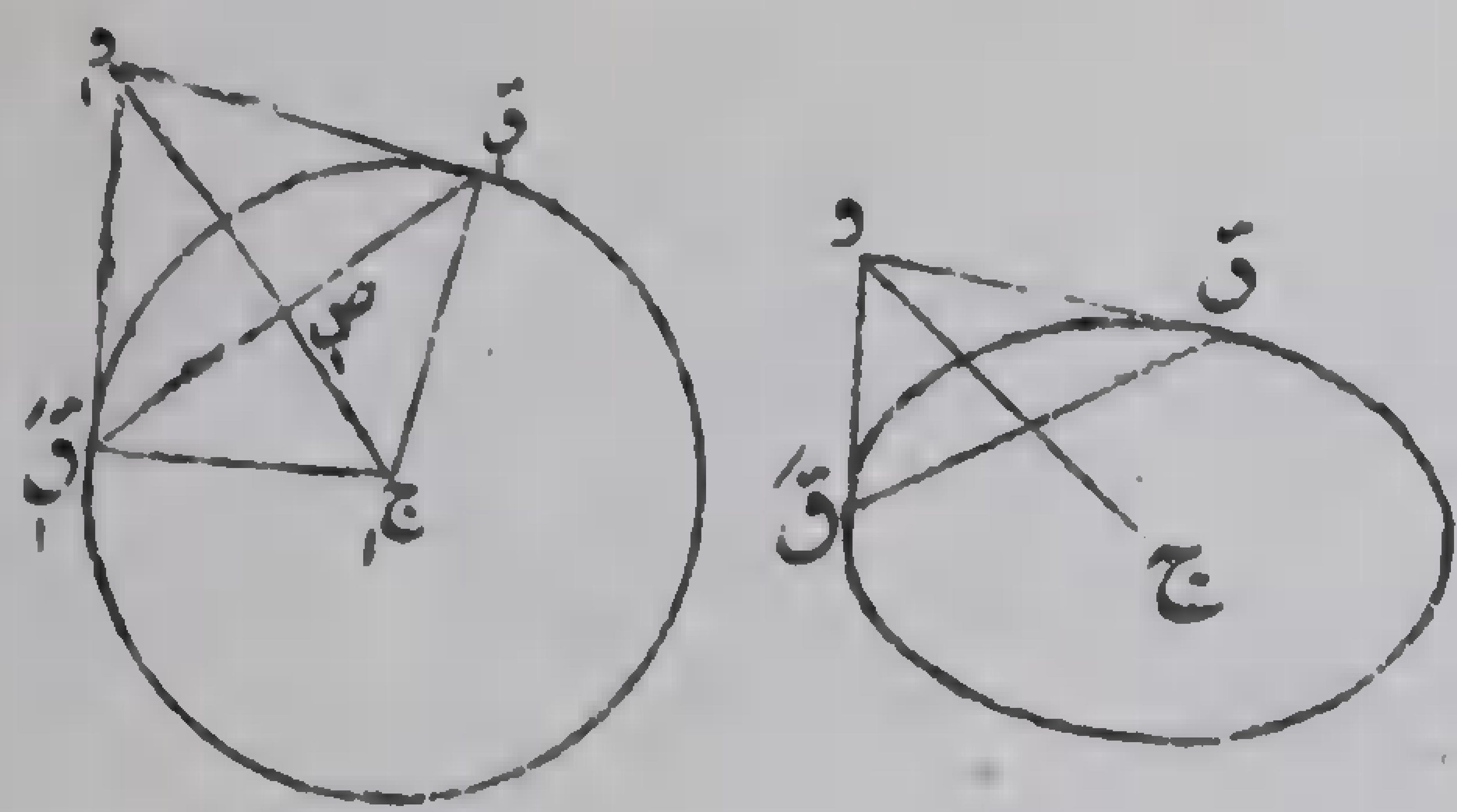
تعریف اگر متوازی وتروں کا کوئی نظام دیا ہوا ہو تو وتروں کے وسطی نقاط کے طریق کو **قطر** کہتے ہیں۔

نوٹ۔ الفاظ قطر اور محور بالعموم قطر یا محور کے اُس طول کو تعبیر کرتے ہیں جو منحنی کے اندر واقع ہو

تعریف اگر قطر (ج ن) وتر (ق قَ) کی تنصیف کرے تو وتر کے نصف (ق ص) کو **قطر کا معیّن** کہتے ہیں

مسئلہ ۲۵

اگر کسی وتر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ اُس قطر پر ملیں گے جو وتر کی تنصیف کرتا ہے



فرض کرو کہ وق اور وقَ مماس ہیں، ج و کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ق قَ کو ص پر ملتا ہے وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ نقاط و، ق، قَ، ج، ص بالترتیب نقاط و، ق، قَ، ج، ص کے ظل ہیں، ج ق، ج قَ کو ملاؤ

تب و ق، و قَ دائرہ کو مس کرتے ہیں [مسئلہ ج]

∴ و ق = و قَ [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

∴ زاویہ و ج ق = زاویہ و ج قَ [اقلیدس م ا ش ۸]

∴ ق ص = قَ ص [اقلیدس م ا ش ۴]

∴ ق ص = قَ ص [مسئلہ ب]

مشقی مثالین ۲۵

۱۔ قطع ناقص کے ایک نقطہ ن پر کا مماس ا پر کے مماس کو ما پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ما متوازی ہے

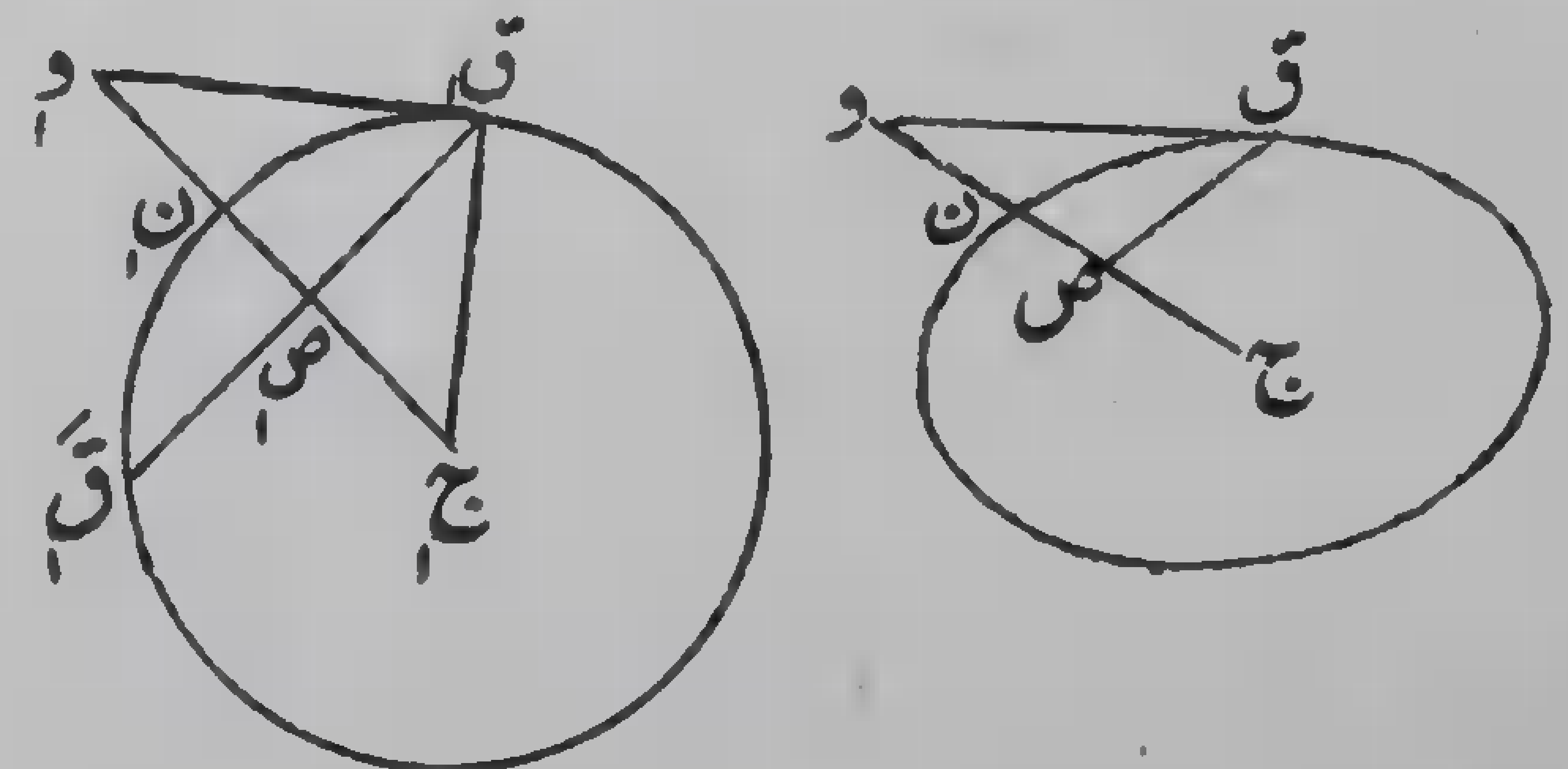
اَن کے۔

۲۔ اگر ج ن مرتب کو ے پر ملے تو ے س، ق قَ پر عمود ہوگا

مسئلہ ۲۶

قطر ج ن کا معین ق ص ہے، اگر ق پر کا مماس قطر ج ن ممدودہ کو و پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ص × ج و = ج ن²



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظِل قطع ناقص ہے، فرض کرو کہ نقاط

ج، ق، و، ن، ص بالترتیب نقاط جِ، قِ، وِ، نِ، صِ کے ظِل ہیں۔ جِ قِ کو ملاؤ اور قِ صِ کو اتنا خارج کرو کہ وہ دائرہ کو نقطہ قَِ پر ملے۔

تب وِ قِ مماس دائرہ ہے [مسئلہ ج]

قِ قَِ کی تنصیف صِ پر ہوتی ہے [مسئلہ ب]

∴ ج ص ق ایک زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م۳ ش۳]

اور ج ق و زاویہ قائمہ ہے [اقلیدس م۳ ش۱۸]

∴ ج ص × ج و = ج ق² [اقلیدس م۶ ش۸]

∴ ج ص × ج و = ج ن²

∴ ج ص × ج و = ج ن² [مسئلہ ب]

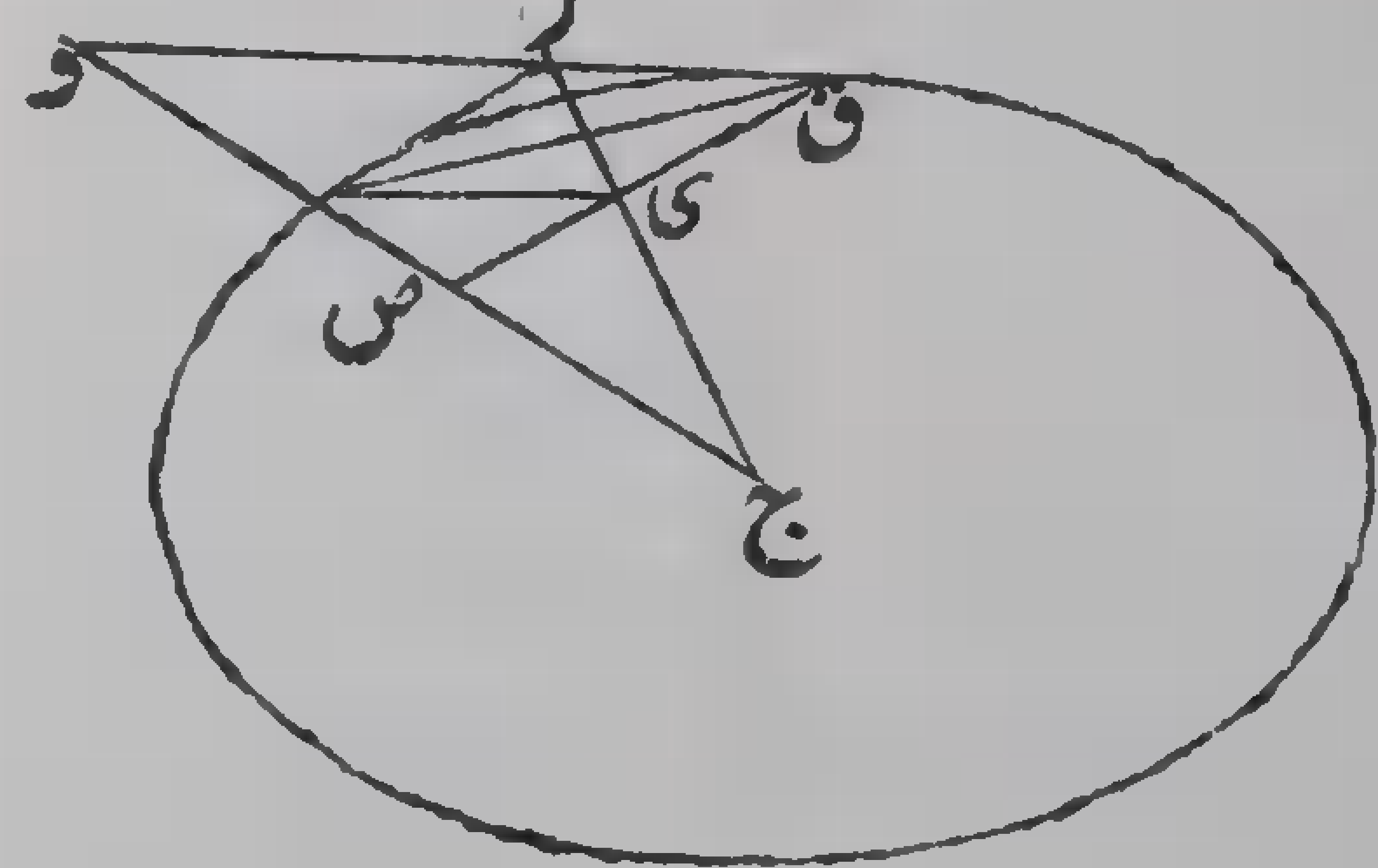
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۶

۱۔ ص ر، ن ق کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ج ق کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ر، ق پر کے مماس کے متوازی ہے۔

۲۔ قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس مساوی مزدوج قطروں [دیکھو صفحہ ۱۰۲] کو ط اور طَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات ط ج ن، طَ ج ن کی باہمی نسبت ج ط² : ج طَ² ہے۔

مسئلہ ۲۶ [متبادل ثبوت]

نقطہ ن پر مماس کھینچو جو ق و کو ل پر ملے، و ق کے متوازی ن ی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ق ص کو ی پر ملتا ہے، ن ق، ر ی کو ملاؤ



تب چونکہ ن ر ق ی متوازی الاضلاع ہے

∴ ر ی، ن ق کی تنصیف کرتا ہے

∴ ر ی مرکز میں سے گذرتا ہے [مسئلہ ۲۵

∴ متشابہ مثلثوں سے

ج ص : ج ن = ج ی : ج ر

= ج ن : ج و

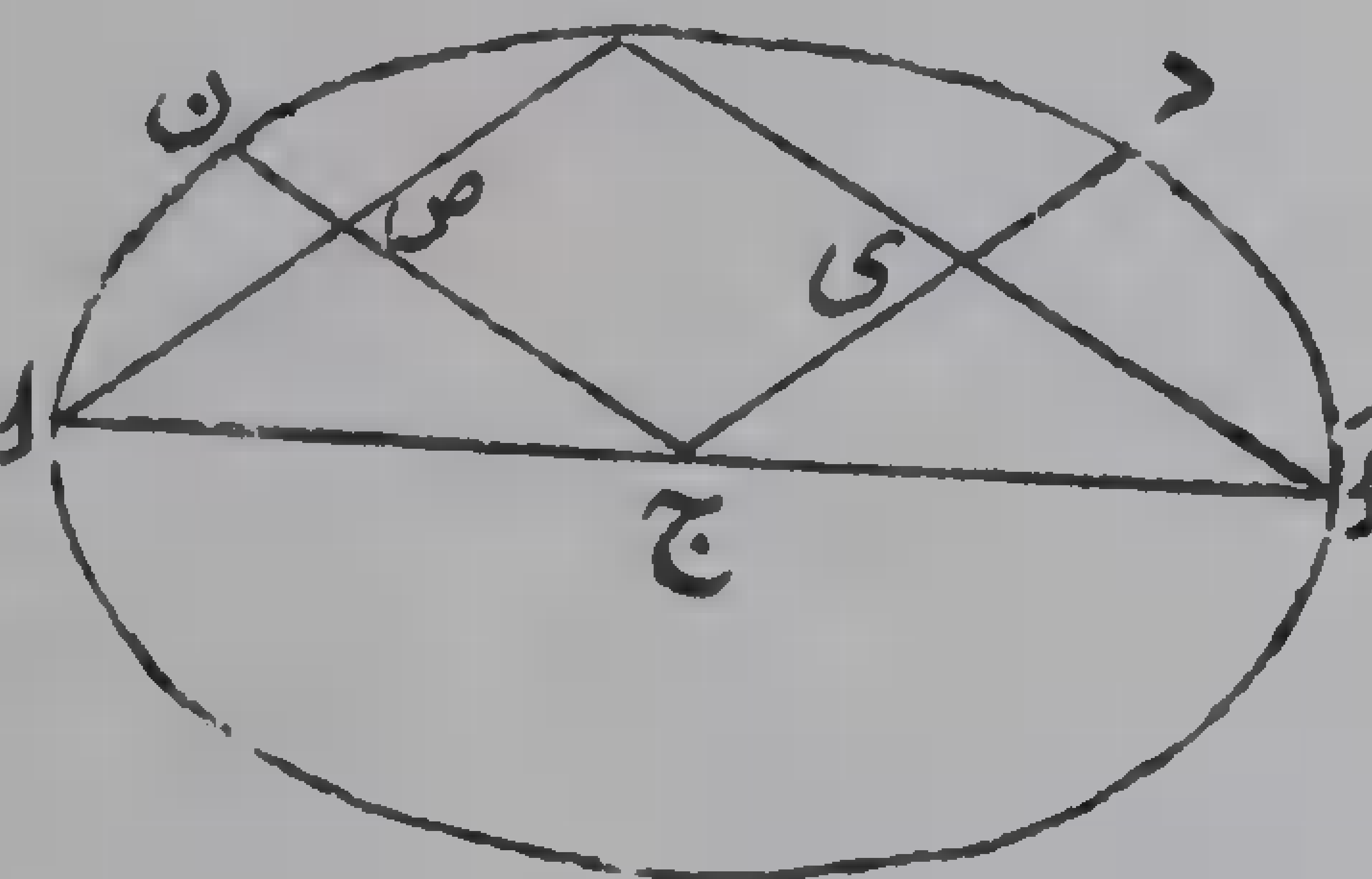
∴ ج ص × ج و = ج ن^۲

مکافی کی صورت میں متماثل مسئلہ کیا ہوگا، اس ترکیب ثبوت کو اس صورت میں استعمال کرو، سنیٹ جون کالج کمبرج کے ماسٹر نے اس مسئلہ کو اس طرح سے ثابت کیا۔

مسئلہ ۲۷

اگر ج د کے متوازی وتروں کی ج ن تنصیف

کرے تو ج ن کے متوازی وتروں کی ج دؔ تنصیف کرے گا



اق کو ج د کے متوازی کھینچو۔ اور فرض کرو کہ یہ ج ن کو ص پر ملتا ہے

تب اق کی تنصیف ص پر ہوگی۔

اَق کو ملاؤ۔ اور فرض کرو کہ یہ ج د کو ی پر قطع کرتا ہے۔

اب چونکہ اق کی تنصیف ص پر ہوتی ہے۔ اور ااَ کی ج پر، اس لئے اَق، ج ن کے متوازی ہے۔

اور چونکہ ج د، اق کے متوازی ہے اور ااَ کا نقطہ وسطی ج ہے اس لئے اَق کی تنصیف ی پر ہوتی ہے۔

اس لئے ج د ایک ایسے وتر اَق کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے متوازی ہے۔ اسلئے ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے

متوازی ہیں۔

تعریف - اگر دو قطروں میں سے ہر ایک، دوسرے کے سب متوازی وتروں کی تنصیف کرے۔ تو ان کو **مزدوج قطر** کہتے ہیں +

انتباہ۔ن پر کا مماس ج د کے متوازی ہے اور د پر کا مماس ج ن کے متوازی ہے [مسئلہ۲۶]

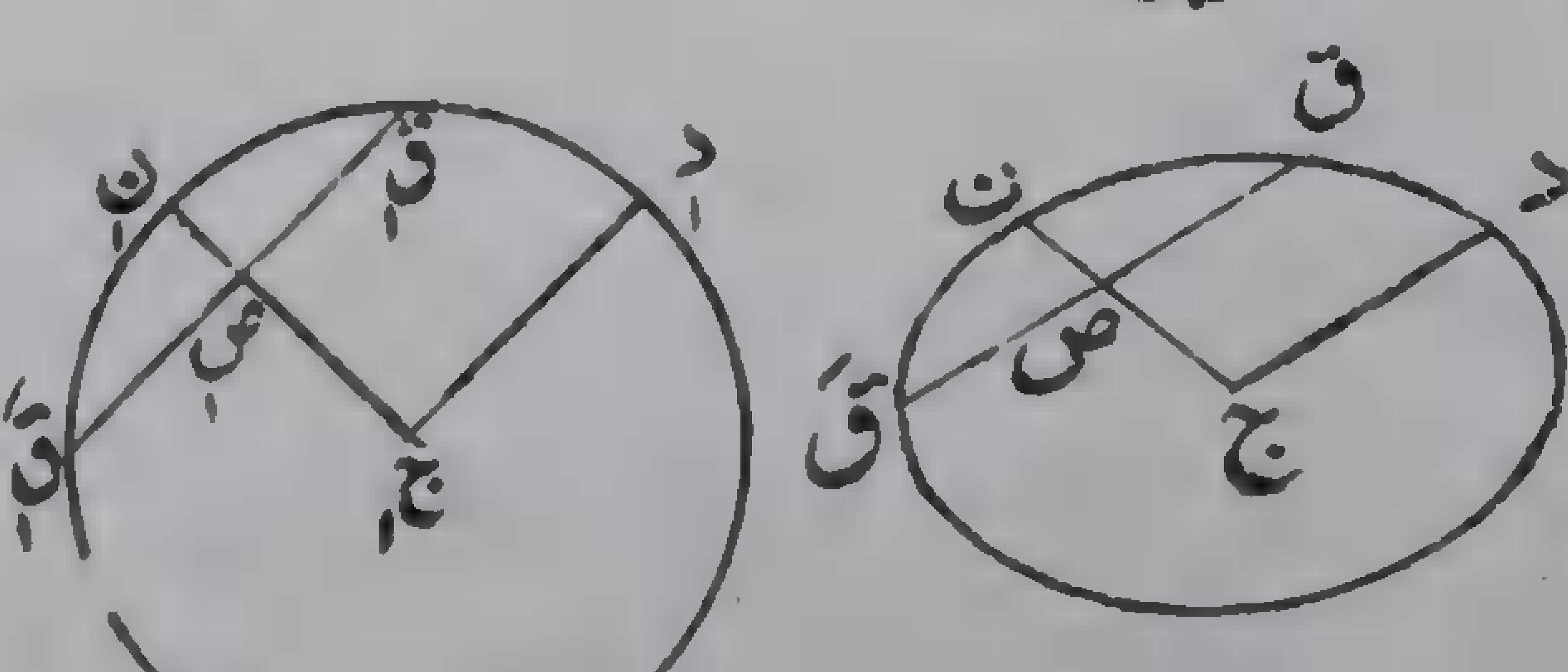
مشقی مثالین مسئلہ۲۷

۱۔ قطع ناقص کے مساوی مزدوج قطر کھینچو

۲۔ ایک مرتب اور دو مزدوج قطر کھینچنے سے ایک مثلث بنایا گیا ہے اگر اس مثلث کے راسوں میں سے مقابل کے اضلاع پر عمود کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے ماسکہ پر ملیں گے۔

مسئلہ ۲۸

قطع ناقص کے مزدوج قطر دائرہ کے قائم الزاویہ قطروں کے ظل ہوتے ہیں



فرض کرو کہ ج ن ، ج د مزدوج قطر ہیں ، وتر
ق ص قَ کو ج د کے متوازی کھینچو اور فرض
کرو کہ اس کی تنصیف ص پر ہوتی ہے ، وہ
دائرہ کھینچو جس کا ظلّ قطع ناقص ہو اور فرض
کرو کہ نقاط د، ق، ن، قَ ص، ج کے ظلّ
د، ق، ن، قَ، ص، ج ہیں

ج د متوازی ہے ق قَ کے [مسئلہ ج]

اور ق قَ کی تنصیف ص پر ہوتی ہے [مسئلہ ب]

∴ ج ص، ق قَ پر عمود ہے [اقلیدس م۳ ش۳]

∴ ج ن، ج د پر عمود ہے

نوٹ مزدوج قطروں کے طولوں کے متعلق کئی
خواص اس مسئلہ سے مستنبط ہو سکتے ہیں (دیکھو
طریق عمل مسئلہ ۳۰) مثلاً

۱- نَ ج ن ، ج د دو مزدوج قطر ہیں اور ر کوئی
نقطہ قطع ناقص پر ہے۔ ن ر ، نَ ر قطر ج د یا ج د
ممدودہ کو ط اور طَ پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ

ج ط × ج طَ = ج د²

۲- اگر ج ن ، ج د اور ج ق ، ج ر مزدوج
قطروں کے دو زوج ہوں اور اگر ن پر کا مماس ج ق ،

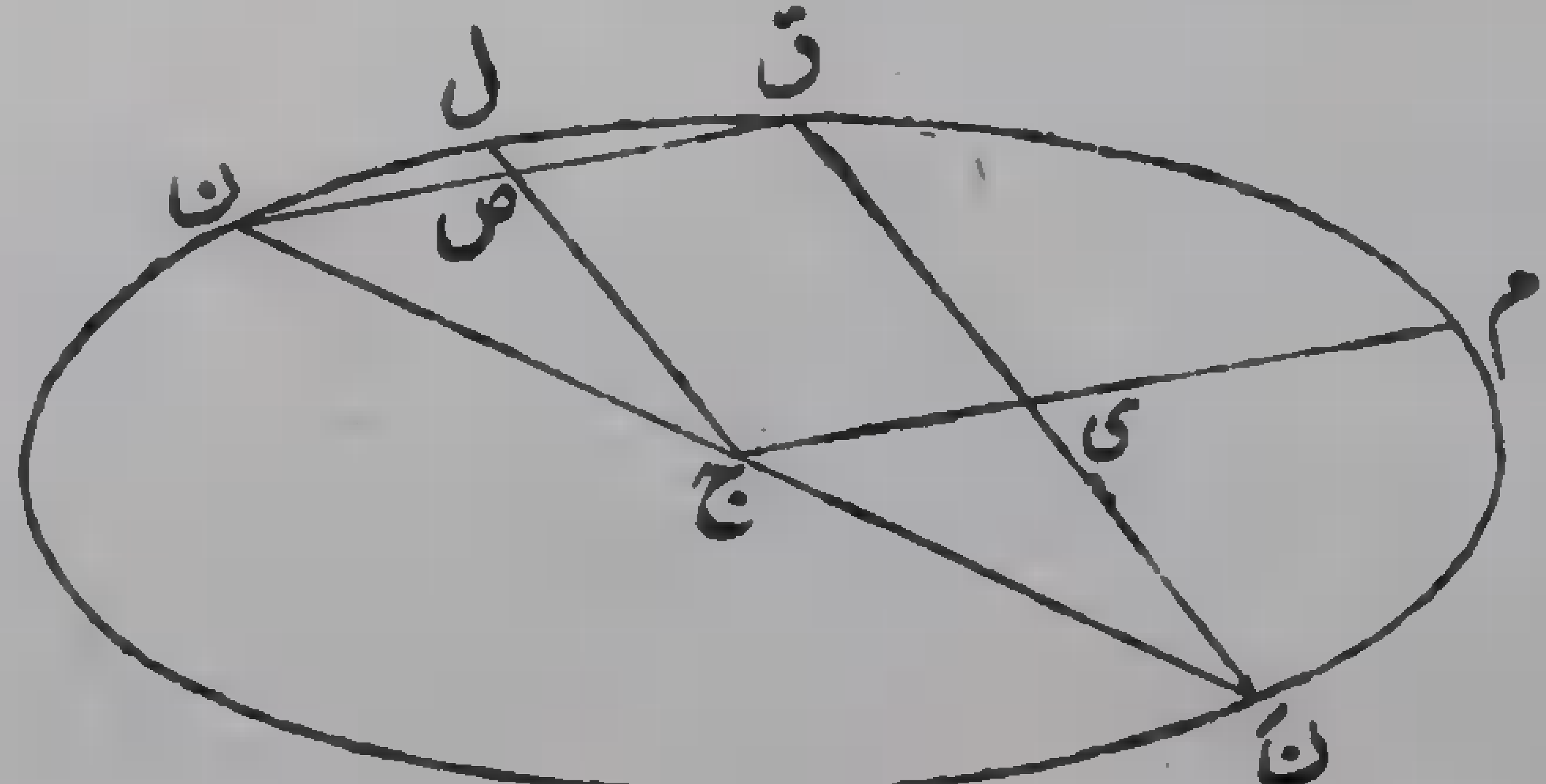
ج ل ممدودہ کو ط اور ط٫ پر ملے تو ثابت کرو کہ

ن ط × ن ط٫ = ج ڈ^۲

تعریف وتر (ق ن، ق نَ) جو قطع ناقص پر کے کسی نقطہ (ق)، کو قطر ن ج نَ کے سروں سے ملاتے ہیں تکمیلی وتر کہلاتے ہیں

مسئلہ ۲۹

تکمیلی وتر مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں



اقطار ج ل، ج م کو تکمیلی وتروں نَ ق، ق ن کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ان کو ص اور ی پر قطع کرتے ہیں

تب ن ص : ص ق = ن ج : ج نَ [اقلیدس م ۲ ش ۲]

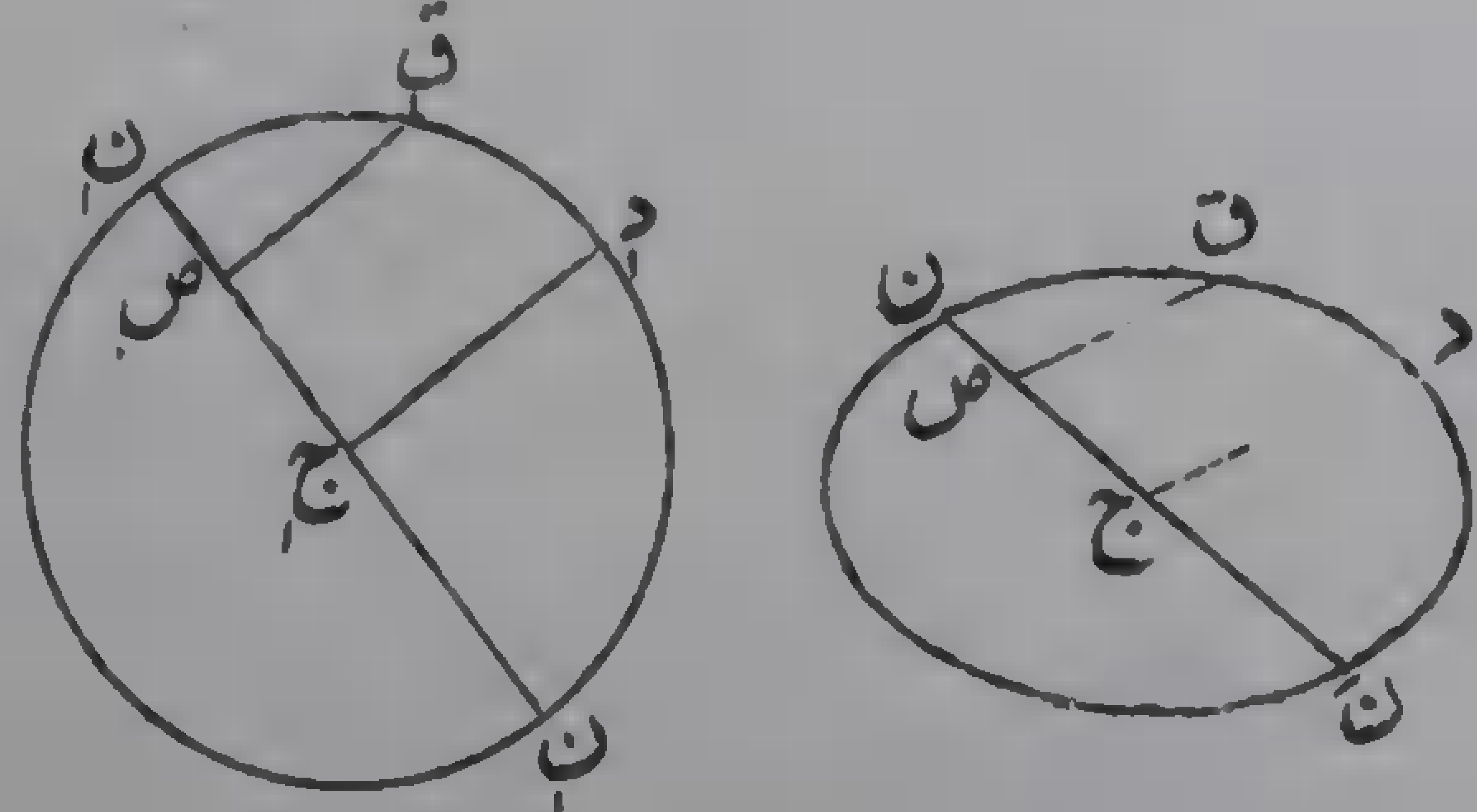
∴ ن ص = ص ق

∴ ج ل ان سب وترون کی تنصیف کرتا ہے

جو ن ق کے متوازی ہوں　　[مسئلہ ۲۸]
یعنے جو ج م کے متوازی ہون
اسی طرح سے ج م اُن سب وتروں کی تنصیف
کرتا ہے جو ج ل کے متوازی ہون-
∴ ج ل ، ج م مزدوج قطر ہیں
اگر ایک شکل متوازی الاضلاع قطع ناقص کے گرد کھینچی جائے
تو اس کے قطر مزدوج ہوں گے-

مسئلہ ۳۰

اگر قطر ن ج نَ کا معین ق ص ہو اور قطر
ج د ، ق ص کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ
ق ص^۲ : ن ص × نَ ص = ج د^۲ : ج ن^۲



وہ دائرہ کھینچو جس کا ظل قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ نقاط
ن۱، ص۱، ج۱، نَ۱، ق۱، د۱ کے ظل ن، ص، ج، نَ، ق، د

ہیں

چونکہ ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں اسلئے

ن١ ج١ د١ زاویہ قائمہ ہے [مسئلہ ۲۸]

لیکن ق١ ص١ متوازی ہے ج١ د١ کے [مسئلہ ج]

اس لئے ق١ ص١، ج١ ن١ پر عمود ہے

∴ ق١ ص١^2 = ن١ ص١ × ن̄١ ص١ [اقلیدس م ۳ ش ۳ اور ۳۵]

∴ ق١ ص١^2 : ن١ ص١ × ن̄١ ص١ = ج١ د١^2 : ج ن١^2

لیکن ق١ ص١^2 : ج١ د١^2 = ق ص^2 : ج د^2 [مسئلہ ج]

اور ن١ ص١ × ن̄١ ص١ : ج ن١^2 = ن ص × ن̄ ص : ج ن^2 [مسئلہ ج]

∴ ق ص^2 : ن ص × ن̄ ص = ج د^2 : ج ن^2

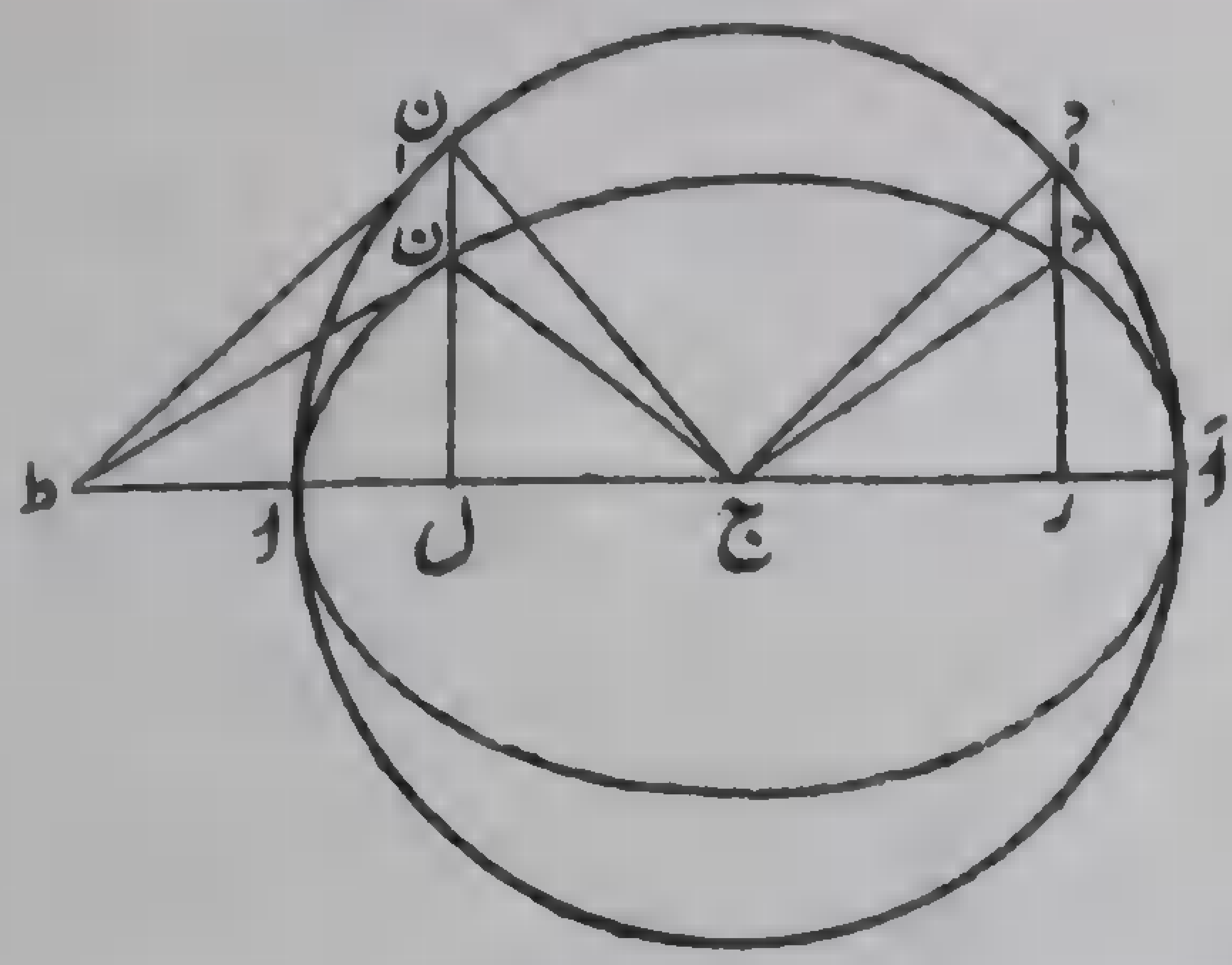
ق ص یا ق ص ممدودہ پر ایک ایسا نقطہ ر لو کہ ص ر : ص ق = ج ن : ج د
ثابت کرو کہ ر کا طریق قطع ناقص ہے اور اسکے محوروں کے
مقام دریافت کرو۔

مسئلہ ۳۱

مثلثات ج ن ل اور ج د ر میں ثابت کرو کہ

ج ر : ن ل = ج ا : ج ب

اور ج ن : د ر = ج ا : ج ب



قطع ناقص کا امدادی دائرہ کھینچو' ل ن اور ر د کو
ن۱ اور د۱ تک خارج کرو' ج ن۱' ج د۱ کو ملاؤ
اور دائرہ اور قطع ناقص کے مماسات بالترتیب
ن۱ ط' ن ط کھینچو' یہہ مماس ایک دوسرے کو
محور پہ قطع کرینگے [مسئلہ ۱۵]

تب ن ط متوازی ہے ج د کے [مسئلہ ۲۴]
اسلئے مثلث ط ل ن' ج ر د متشابہ ہیں

∴ ط ل : ج ر = ل ن : ر د = ل ن۱ : ر د۱ [مسئلہ۱۴]
اور زاویہ ط ل ن۱ = زاویہ ج ر د۱

∴ مثلث ط ل ن۱' ج ر د۱ متشابہ ہیں [اقلیدس م ۶ ش ۶]

∴ ن۱ ط متوازی ہے ج د۱ کے

∴ زاویہ ن۱ ج د۱ = زاویہ ج ن۱ ط = زاویہ قائمہ
اسلئے زاوئے ل ن۱ ج' د۱ ج ر مساوی ہیں کیونکہ
انمیں سے ہرایک زاویہ ن۱ ج ل کا متمم ہے

∴ مثلثات ن' ل ج ، ج ر د' ہر طرح سے
ایک دوسرے کے مساوی ہیں [اقلیدس م ا ش ۲۶]

∴ ن' ل = ج ر

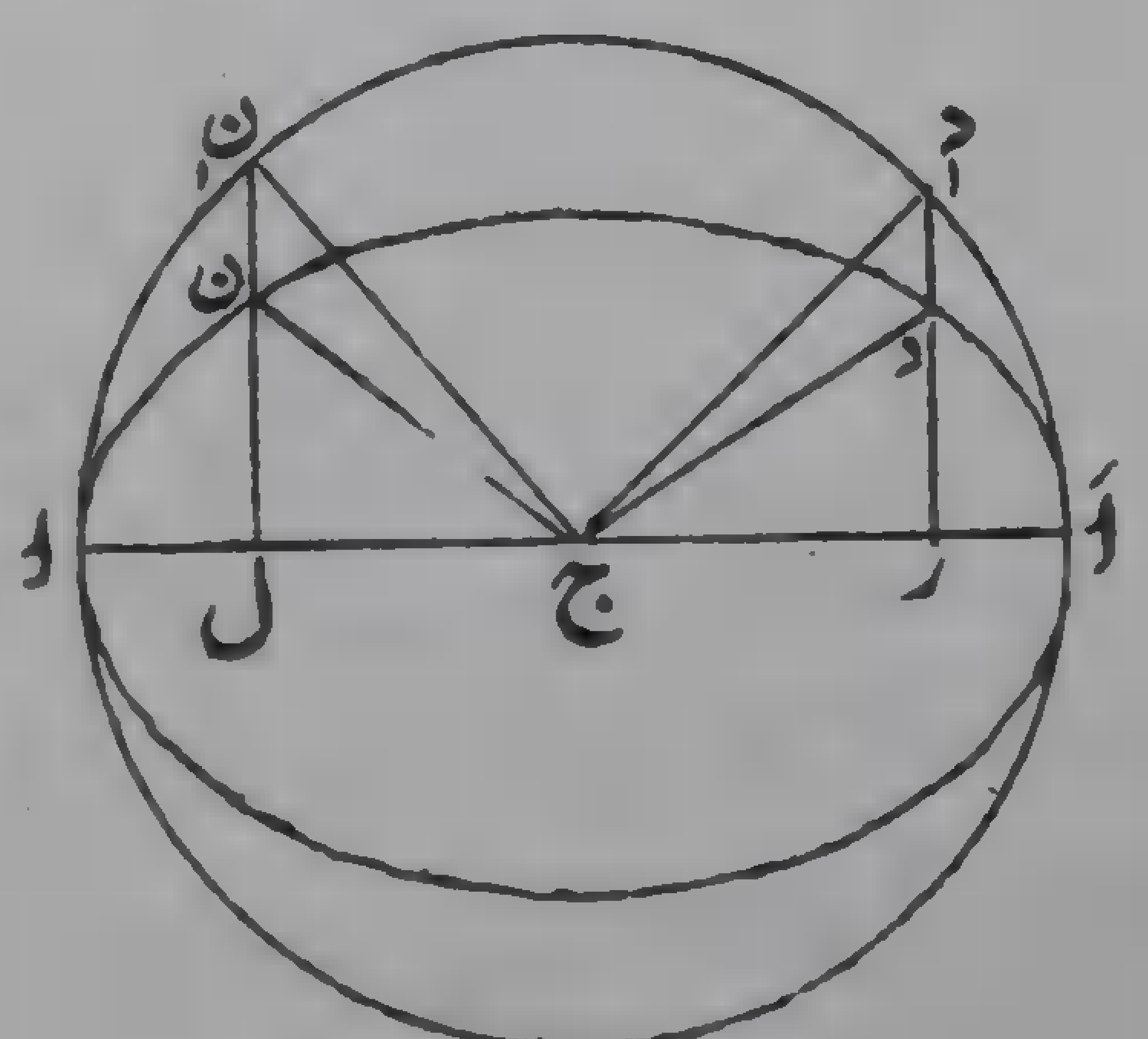
لیکن ن' ل : ن ل = ج ا : ج ب

∴ ج ر : ن ل = ج ا : ج ب

اسیطرح سے ج ل : د ر = ج ا : ج ب

مسئلہ ۳۲

ج ن^2 + ج د^2 = ج ا^2 + ج ب^2



قطع ناقص کا امدادی دائرہ کھینچو۔
ل ن اور ر د کو اتنا خارج کرو کہ وہ امدادی دائرہ
کو ن' اور د' پر ملیں۔
ج ن' ، ج د' کو ملاؤ
تب د ر^2 : ج ل^2 = ج ب^2 : ج ا^2 [مسئلہ ۳۱]

اور ن ل٢ : ج ر٢ = ج ب٢ : ج ا٢ [مسئلہ ۳۱]

∴ د ر٢ + ن ل٢ : ج ل٢ + ج ر٢ = ج ب٢ : ج ا٢

لیکن ج ل٢ + ج ر٢ = ج ل٢ + ن ل٢ = ج ا٢ [مسئلہ ۳۱]

∴ د ر٢ + ن ل٢ = ج ب٢

اب ج ن٢ + ج د٢ = ج ر٢ + ج ل٢ + د ر٢ + ن ل٢

= ج ا٢ + ج ب٢

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۱

اگر ن پر کا مماس محور اعظم کو ط پر ملے اور ق اس عمود کا پائین ہو جو ج سے مماس پر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ

ج ق × ق ط : ج ط٢ = ج ل × ن ل : ج د٢

ثابت کرو کہ (ا) ن گ : ج د = ج ب : ج ا

(ب) ن گ۱ : ج د = ج ا : ج ب

(ج) ن گ × ن گ۱ = ج د٢

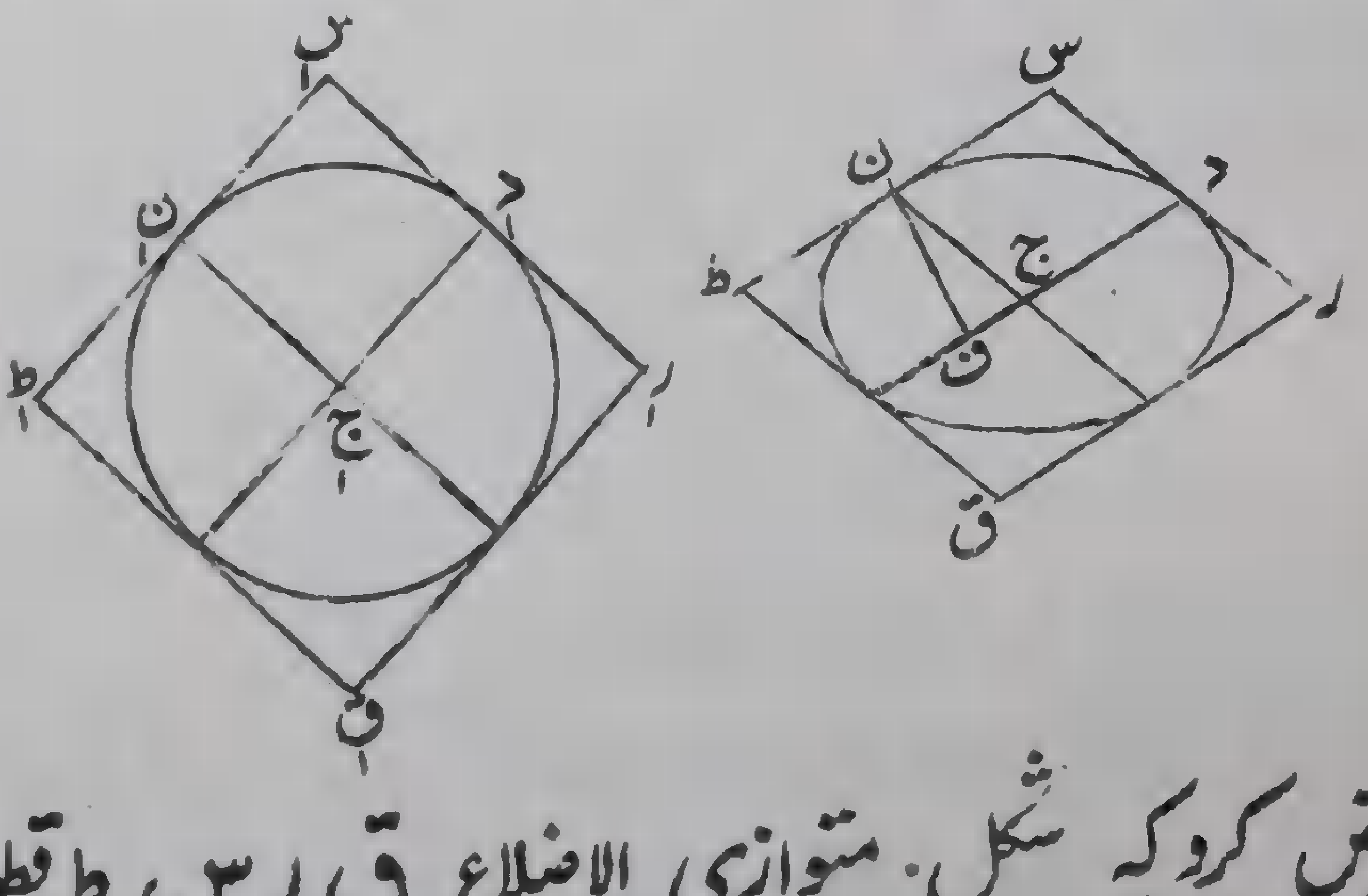
مشقی مثالیں مسئلہ ۳۲

۱- مزدوج قطروں کے ایک زوج کی حاصل جمع کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو۔

۲- ج ن، ج د مزدوج قطر ہیں، اگر ن اور د پر کے عماد ن گ اور د ع ہوں - تو ثابت کرو- کہ حاصل جمع ن گ² + د ع² مستقل ہے-

مسئلہ ۳۳

ثابت کرو کہ اُس متوازی الاضلاع کا رقبہ جو مزدوج قطروں کے سروں پر مماس کھینچنے سے بنے مستقل ہوتا ہے یعنی ن ف × ج د = ج ا × ج ب



فرض کرو کہ شکل. متوازی الاضلاع ق ر س ط قطع ناقص کے گرد بنی ہوئی ہے، اسکے اضلاع ج ن یا ج د کے متوازی ہیں

[مسئلہ ۲۴]

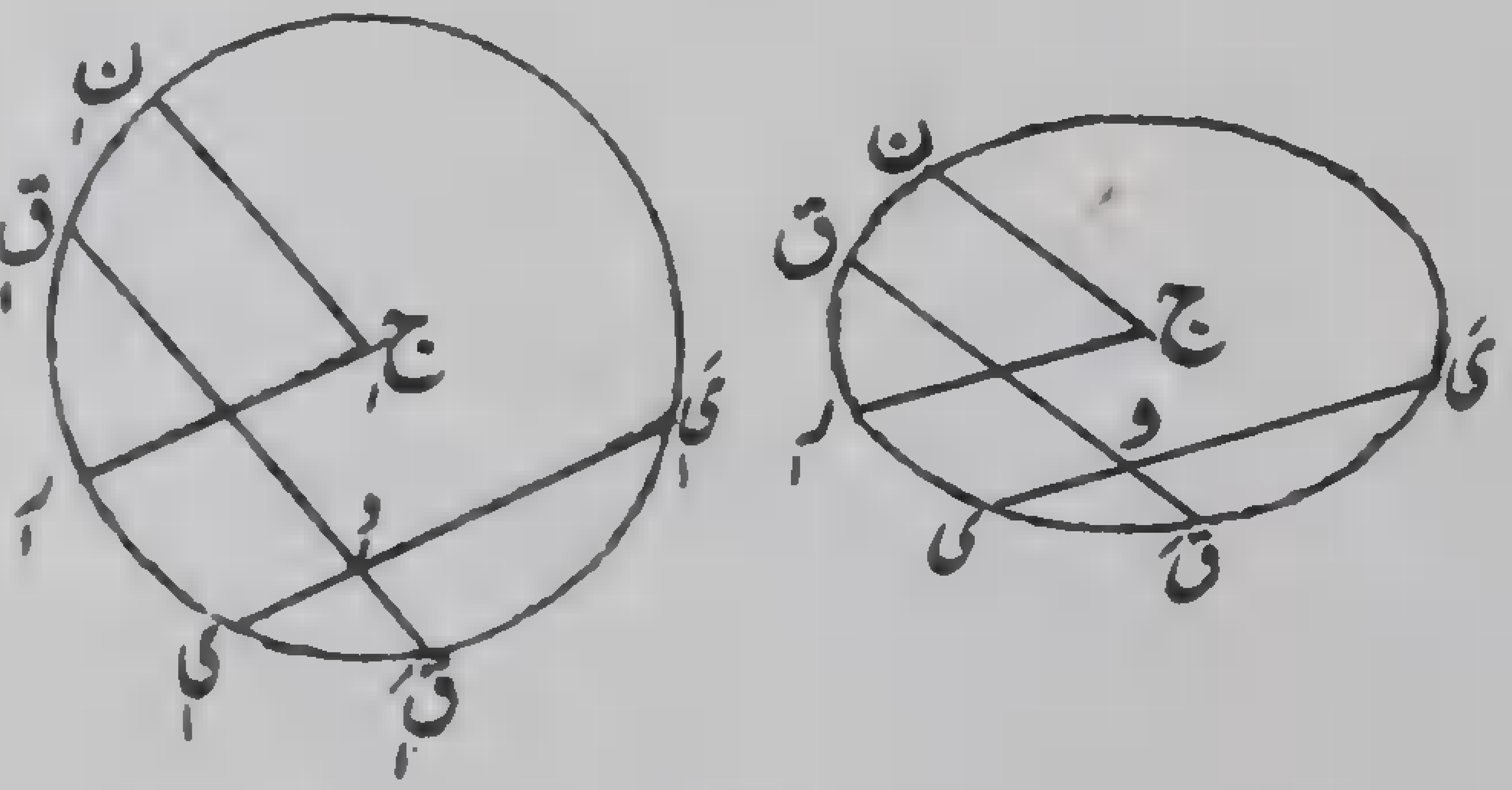
وہ دائرہ کھینچو جس کا ظلّ قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ نقاط ن، ج، د، ق، ر وغیرہ کے ظلّ نقاط ن، ج، د، ق، ر، وغیرہ ہیں

تب زاویہ ن ج د قائمہ ہے کیونکہ ج ن، ج د
ایک دوسرے کے مزدوج ہیں [مسئلہ ۲۸]
اور شکل ق ر س ط دائرہ کے گرد بنی ہوئی ہے [مسئلہ د]
اور اسکے اضلاع ج ن یا ج د کے متوازی ہیں [مسئلہ ج]
اس لئے ق ر س ط ایک مربع ہے اور اُس مربع
کے مساوی ہے جو دائرہ کے قطر پر بنایا جائے
اور ظاہر ہے کہ اِس کا رقبہ مستقل ہے۔
اس لئے ق ر س ط کا رقبہ بھی ایک مستقل مقدار
ہے [مسئلہ ل]
نیز اس متوازی الاضلاع کا رقبہ = ۴ ن ف × ج د
لیکن اگر ج ا، ج ب محور ہوں تو رقبہ = ۴ ج ا × ج ب
∴ ن ف × ج د = ج ا × ج ب

مسئلہ ۳۴

اگر قطع ناقص کے دو وتر ایکدوسرے کو قطع کریں
تو ان کے حصوں کے حاصل ضربوں کو آپسمیں
وہی نسبت ہوگی جو ان کے متوازی نصف
قطروں کے مربعوں کو آپس میں ہے۔
فرض کرو کہ ق و قَ، ی و یَ وتر ہیں اور
ج ن، ج ر ان کے متوازی نصف قطر ہیں
وہ دائرہ کھینچو جس کا ظِل قطع ناقص ہو اور فرض کرو کہ

نقاط ق$_1$، و$_1$، قَ$_1$، وغیرہ کے ظِل ق، و، قَ، وغیرہ ہیں



دائرہ میں ق$_1$و$_1$ × و$_1$قَ$_1$ = ی$_1$و$_1$ × و$_1$یَ$_1$ [اقلیدس م۳ ش۳۵]

اور ج ن$_1^2$ = ج ر$_1^2$

∴ ق$_1$و$_1$ × و$_1$قَ$_1$: ی$_1$و$_1$ × و$_1$یَ$_1$ = ج ن$_1^2$: ج ر$_1^2$

لیکن ق$_1$و$_1$ × و$_1$قَ$_1$: ج ن$_1^2$ = ق و × و قَ : ج ن^2 [مسئلہ ج]

اور ی$_1$و$_1$ × و$_1$یَ$_1$: ج ر$_1^2$ = ی و × و یَ : ج ر^2 [مسئلہ ج]

∴ ق و × و قَ : ی و × و یَ = ج ن^2 : ج ر^2

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۲

۱- ن گ × ن گ$_1$ = ج ڈ^2 (دیکھو مسئلہ ۱۸)

۲- س ن × سَ ن = ج ڈ^2

۳- ج د × س ما = ب ج × س ن

۴- ج د، ج ن دو مزدوج قطر ہیں اگر دق، س ن کے متوازی کھینچا جائے اور ج ق، دق پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ج ق محور اصغر کے نصف کے مساوی ہے

۵- محور اصغر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور نقطہ د سے اس دائرہ کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ مماس ن کے ماسکی فاصلوں کے متوازی ہیں۔

مشقی مثالین مسئلہ ۳۴

۱- کسی نقطہ بیرونی سے قطع ناقص کے مماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ یہ متوازی نصف قطرون کے متناسب ہیں

۲- اگر ایک دائرہ قطع ناقص کو چار نقطون پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ اُن کو ملانے والے وتر محور سے مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

۳- اگر ایک دائرہ قطع ناقص کو نقاط ن اور ق پر مس کرے تو ثابت کرو کہ ن ق ایک محور کے متوازی ہے۔

۴- مسئلہ ۳ اور مسئلہ ۳۰ کو مسئلہ ۳۴ سے حاصل کرو

۵- اگر ن ق، ن قَ محور سے مساوی زاوئے بنائیں

تو ثابت کرو کہ ن ق قَ کا بیرونی دائرہ (یعنے وہ دائرہ جو مثلث ن ق قَ کے گرد بنایا جائے) مخروطی تراشش کو ن پر مس کرے گا۔

قطع زائد یا ہذلولی

تعریف قطع زائد یا ہذلولی ایک ایسے نقطہ (ن) کا طریق ہے جس کے فاصلے ایک ثابت نقطہ (س) سے اور ایک ثابت مستقیم خط (لام) سے باہم ایسی نسبت (ر) رکھیں جو ایک سے زیادہ ہو۔

(س ن = ر × ن م)

ثابت نقطہ (س) کو ماسکہ کہتے ہیں۔

ثابت مستقیم خط (لام) کو مرتب کہتے ہیں۔

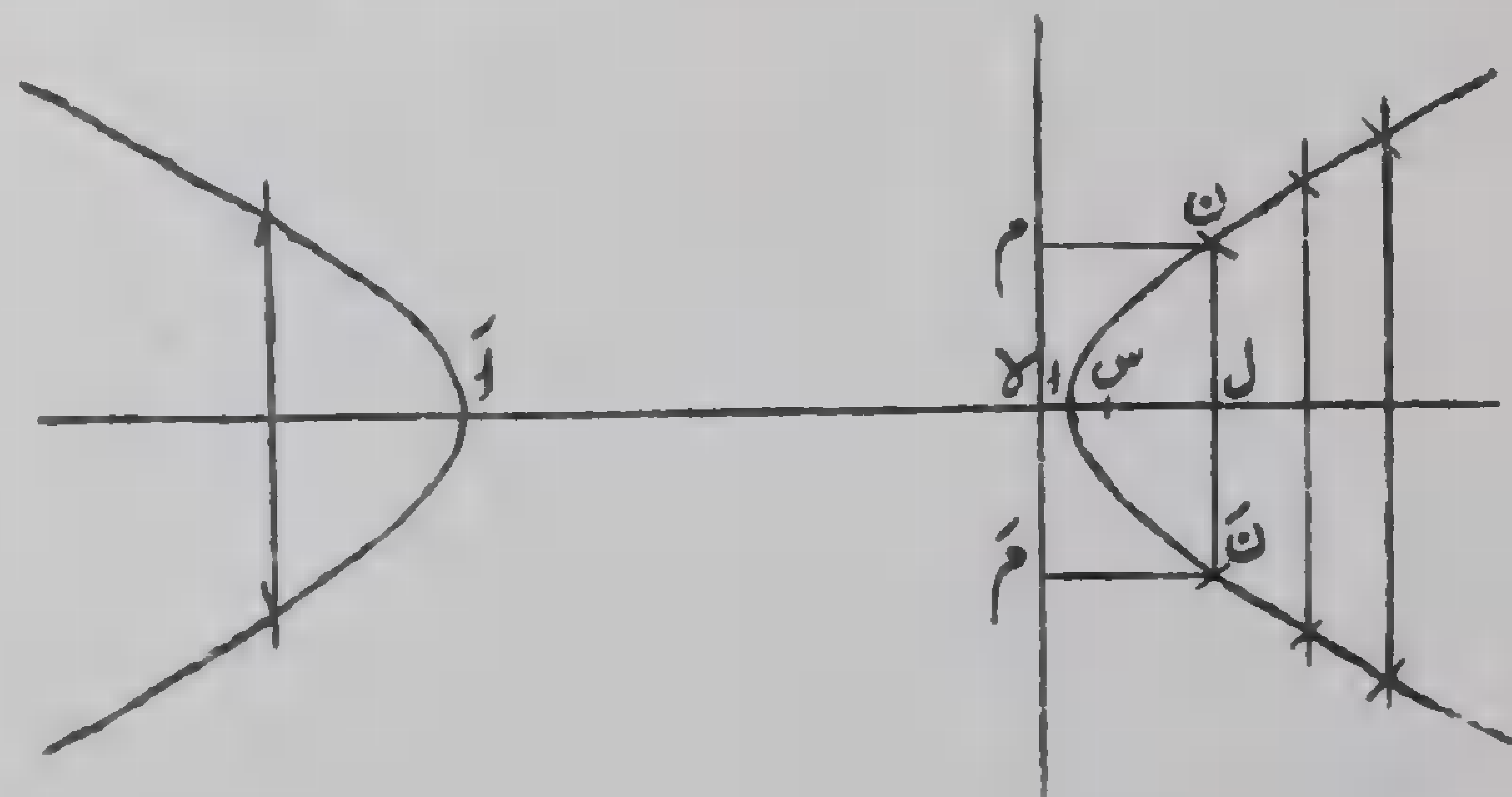
مستقل نسبت (ر) کو خروج المرکز کہتے ہیں۔

مسئلہ ۱

قطع زائد پر کے نقاط دریافت کرنے کا عمل

اگر ماسکہ سے مرتب پر عمود نکالا جائے تو وہ منحنی کا محور قشاکل ہوگا

راس ا اور اَ دریافت کرو



ماسکہ س سے مرتب پر عمود س لا کھینچو۔

لا س کو ا پر اس طرح تقسیم کرو کہ

س ا = ر × ا لا

نیز س لا ممدودہ پر ایک ایسا نقطہ اَ لو کہ

س اَ = ر × اَ لا

تب ا اور اَ بموجب تعریف منحنی پر واقع ہیں

مستقیم خط ا اَ پر کوئی نقطہ ل لو، س کو مرکز اور ر × ل لا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو۔ نقطہ ل میں سے ایک عمود ن ل نَ خط ا اَ پر کھینچو جو دائرہ کو ن اور نَ پر قطع کرے، تب ن اور نَ قطع زائد پر ہوں گے۔

مرتب پر عمود ن م، نَ مَ کھینچو

س ن = ر × ل لا = ر × ن م

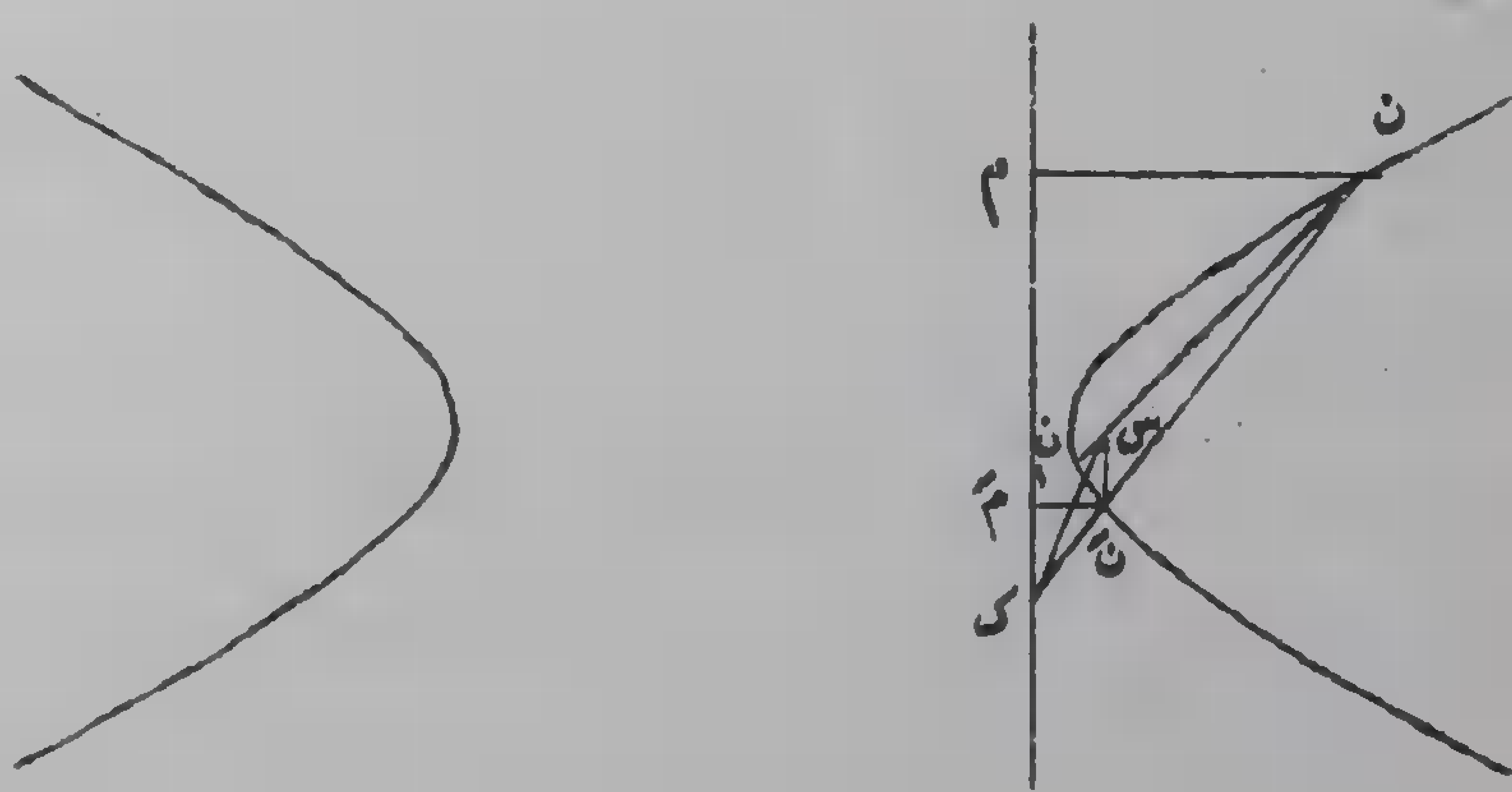
س نَ = ر × ل لا = ر × نَ مَ

پس معلوم ہوا کہ اگر ا اَ پر کوئی نقطہ ل لیا جائے تو اس طرح سے ہمیں ا اَ کے مقابل جانبوں میں مساوی فاصلوں پر دو نقطے ن اور نَ حاصل ہوتے ہیں، اس لئے قطع زائد بلحاظ ا اَ کے متشاکل ہے یعنی ا اَ محور ہے اور نقاط ا اور اَ اس کے راس ہیں۔

نوٹ۔ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ دائرہ عمود ل ن کو ہمیشہ قطع کرے گا جب ل محور ا اَ کے کسی حصہ پر واقع ہو سوائے اُس حصہ کے جو ا اور اَ کے درمیان ہے، اس لئے اگر ا اور اَ پر دو خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو قطع زائد بالکل ان خطوں کے باہر کی طرف واقع ہوگا لیکن دونوں طرف لاتناہی تک پھیلا ہوا ہوگا۔(ضمیمہ ملاحظہ ہو)

مسئلہ ۲

اگر وتر ن نَ مرتب کو ک پر قطع کرے تو س ک / س ن اور س نَ کے درمیانی زاوئے کی تنصیف کرے گا۔



س ن، س نَ، س ک کو ملاؤ، ن س کو ن، تک خارج کرو اور مرتب پر عمود ن م، نَ مَ نکالو۔

تب س ن = ر × ن م

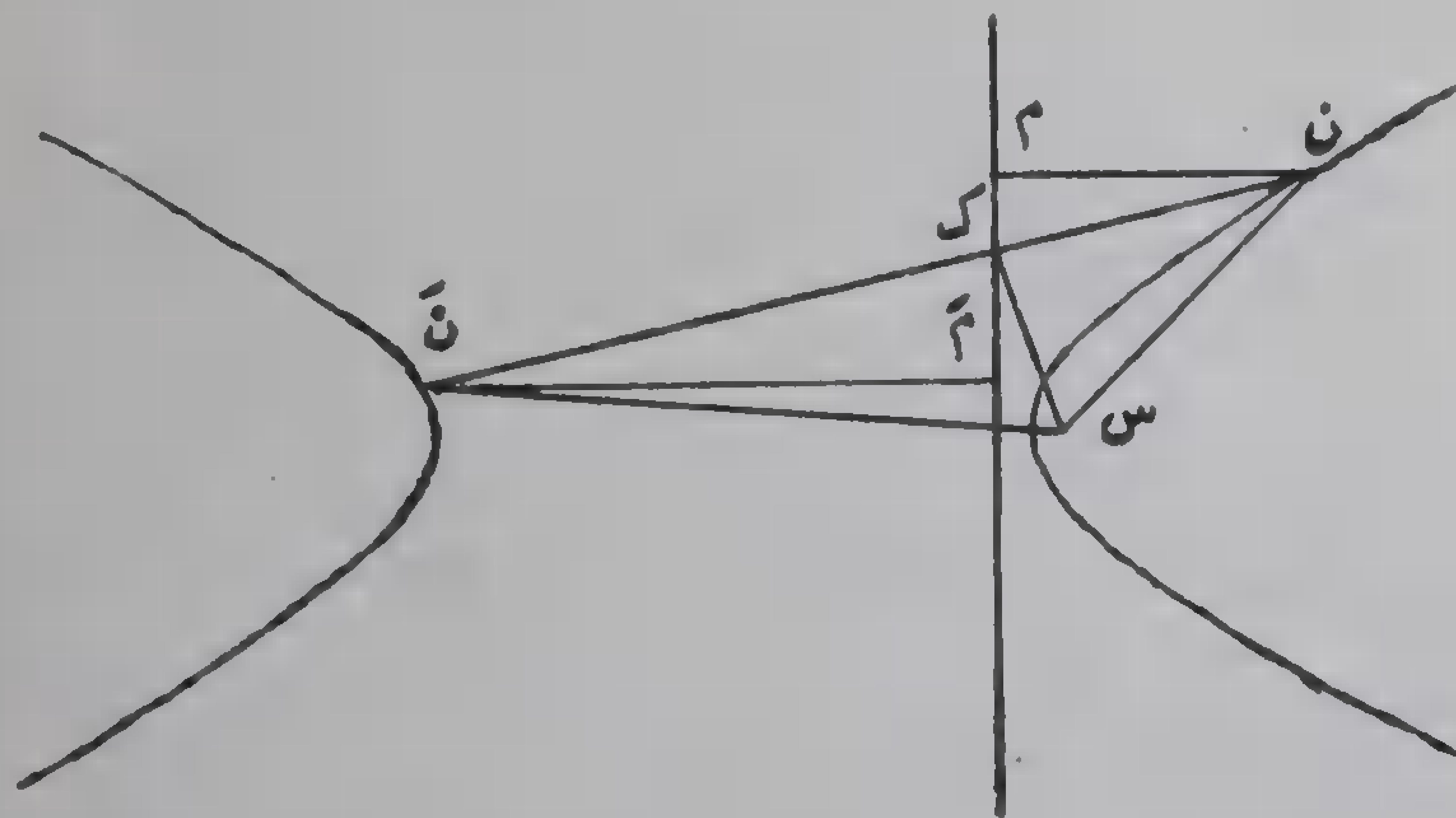
اور س نَ = ر × نَ مَ

∴ س ن : س نَ = ن م : نَ مَ

= ن ک : نَ ک [متشابہ مثلثوں ن ک م، نَ ک مَ سے]

اسلئے س ک زاویہ نَ س ن، کی تنصیف کرتا ہے۔

[اقلیدس م ٦ ش ۱]



اسی طرح سے اگر ن اور نَ قطع زائد کی مختلف شاخوں پر واقع ہوں تو س ک زاویہ ن س نَ کی تنصیف کرے گا۔

ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط قطع زائد کو صرف دو نقطوں پر قطع کرتا ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱

۱ ۔ اگر کسی تراشِ مخروطی میں ن م کو مرتب تک ایک ثابت اور مستقیم خط کے متوازی کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ نسبت س ن : ن م مستقل ہے۔

۲۔ اگر ایک ناقص، ایک مکافی اور ایک زائد کا ماسکہ اور مرتب دونوں مشترک ہوں تو ثابت کرو کہ ناقص مکافی کے بالکل ایک طرف واقع ہوگا اور زائد دوسری طرف۔

۔ ثابت کرو کہ کسی مخروطی تراش میں ماسکہ میں سے گزرنے والا

وتر ماسکہ اور مرتب پر موسیقی نسبت میں تقسیم ہوتا ہے

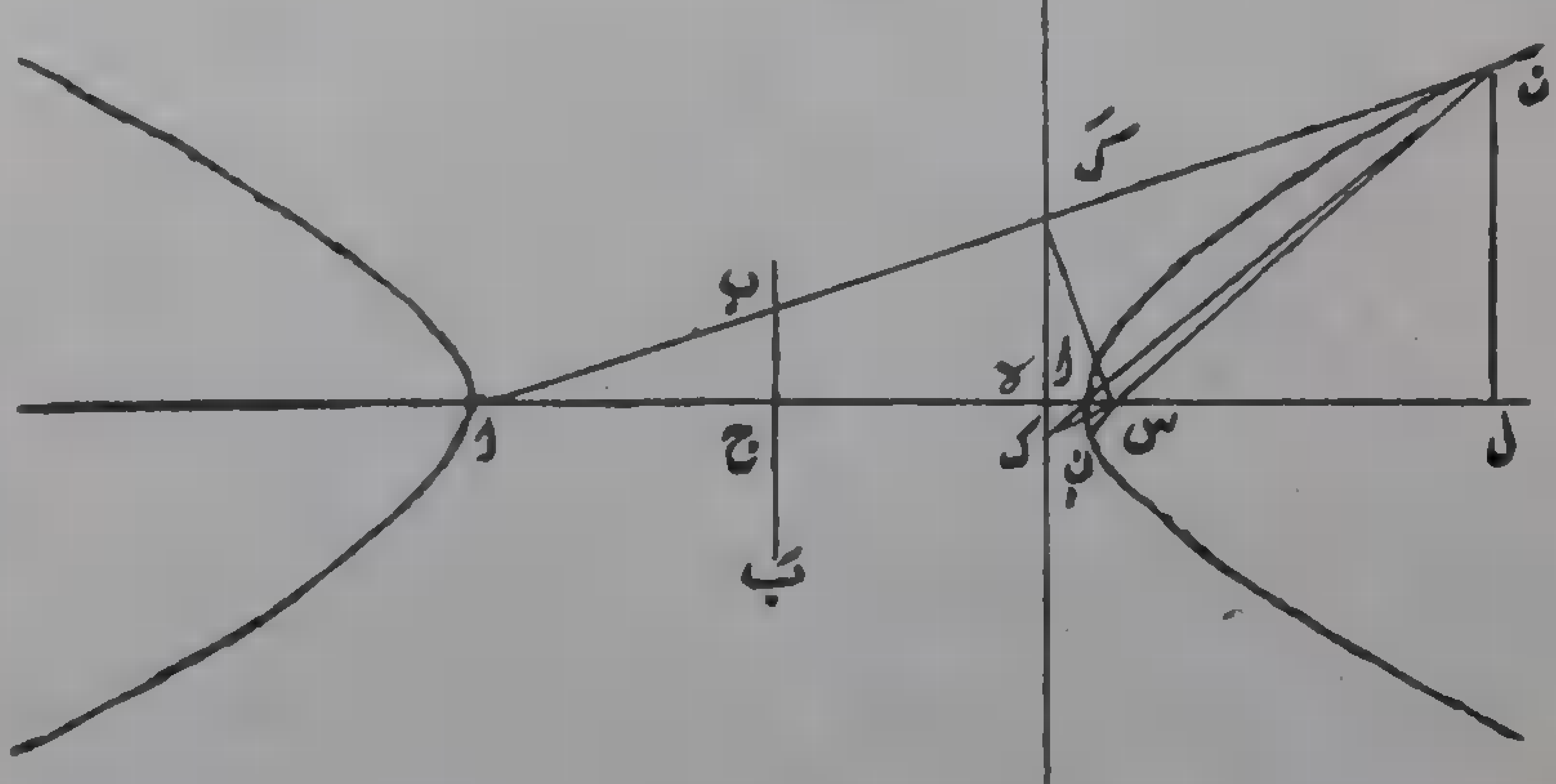
مشقی مثالیں مسئلہ ۲

۱- ثابت کرو کہ ایک مستقیم خط ایک مخروطی تراش کو صرف دو نقطوں پر کاٹ سکتا ہے۔

۲- اگر ایک مخروطی تراشں میں منحنی کے دو نقطوں ن، نَ کو ایک متغیر نقطہ ق سے ملایا جائے اور ن ق، نَ ق مرتب کو ن، نِ پر ملیں تو ثابت کرو کہ زاویہ ن س نِ مستقل ہے

مسئلہ ۳

اگر قطع زائد کے کسی نقطہ (ن) کا معین ن ل ہو تو ثابت کرو کہ نسبت ن ل۲ : ا ل × اَ ل مستقل ہے۔



ن ا، ن اَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ بشرط ضرورت وہ خارج

کرنے پر مرتب کو ک اور کَ پر ملتے ہیں۔
س ن، س ک س کَ کو ملاؤ اور ن س کو ن، تک خارج کرو
متشابہ مثلثوں ن ا ل اور ک ا لا سے
ن ل : ا ل = ک لا : ا لا
متشابہ مثلثوں ن اَ ل اور کَ اَ لا سے
ن ل : اَ ل = کَ لا : اَ لا
∴ ن ل۲ : ا ل × اَ ل = ک لا × کَ لا : ا لا × اَ لا
لیکن س ک زاویہ ا س ن، کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
اور س کَ زاویہ ا س ن کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۲]
∴ ک س کَ ایک زاویہ قائمہ ہے
∴ ک لا × کَ لا = س لا۲ [اقلیدس م ۶ ش ۸]
∴ ن ل۲ : ا ل × اَ ل = س لا۲ : ا لا × اَ لا
جو ایک مستقل نسبت ہے۔
تعریفات ج ب۲ : ج ا۲ کو اس مستقل نسبت کے مساوی لو
اور ا اَ پر عمود ج ب قائم کرو
۱۔ تب ا اَ کو قاطع محور کہتے ہیں
۲۔ ج کو منحنی کا مرکز کہتے ہیں
۳۔ ج ب کو نیم مزدوج محور کہتے ہیں
پس ن ل۲ : ا ل × اَ ل = ج ب۲ : ج ا۲

مشقی مثالیں مسئلہ ۳

۱- ن ل نَ قطع ناقص کا دگنا معیّن ہے، ا ن اور اَ نَ کے تقاطع کا طریق دریافت کرو

۲- قایم قطع زائد (صفحہ ۱۲۶) کی صورت میں ثابت کرو کہ

ن لٗ = ا ل × اَ ل

۳- ایک قایم قطع زائد کا دُگنا معین ن ل نَ ہے، ثابت کرو کہ زاویوں ن ا نَ، ن اَ نَ کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے

۴- ایک دائرہ کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ایک ثابت قطر ا ب ممدود کو ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ وہ مستقیم خط جو ط میں سے گزرے اور اس قطر پر عمود ہو ا ن اور ب ن ممدودہ کو ایسے نقطوں پر ملے گا جو ایک قایم ہذلولی پر واقع ہونگے۔

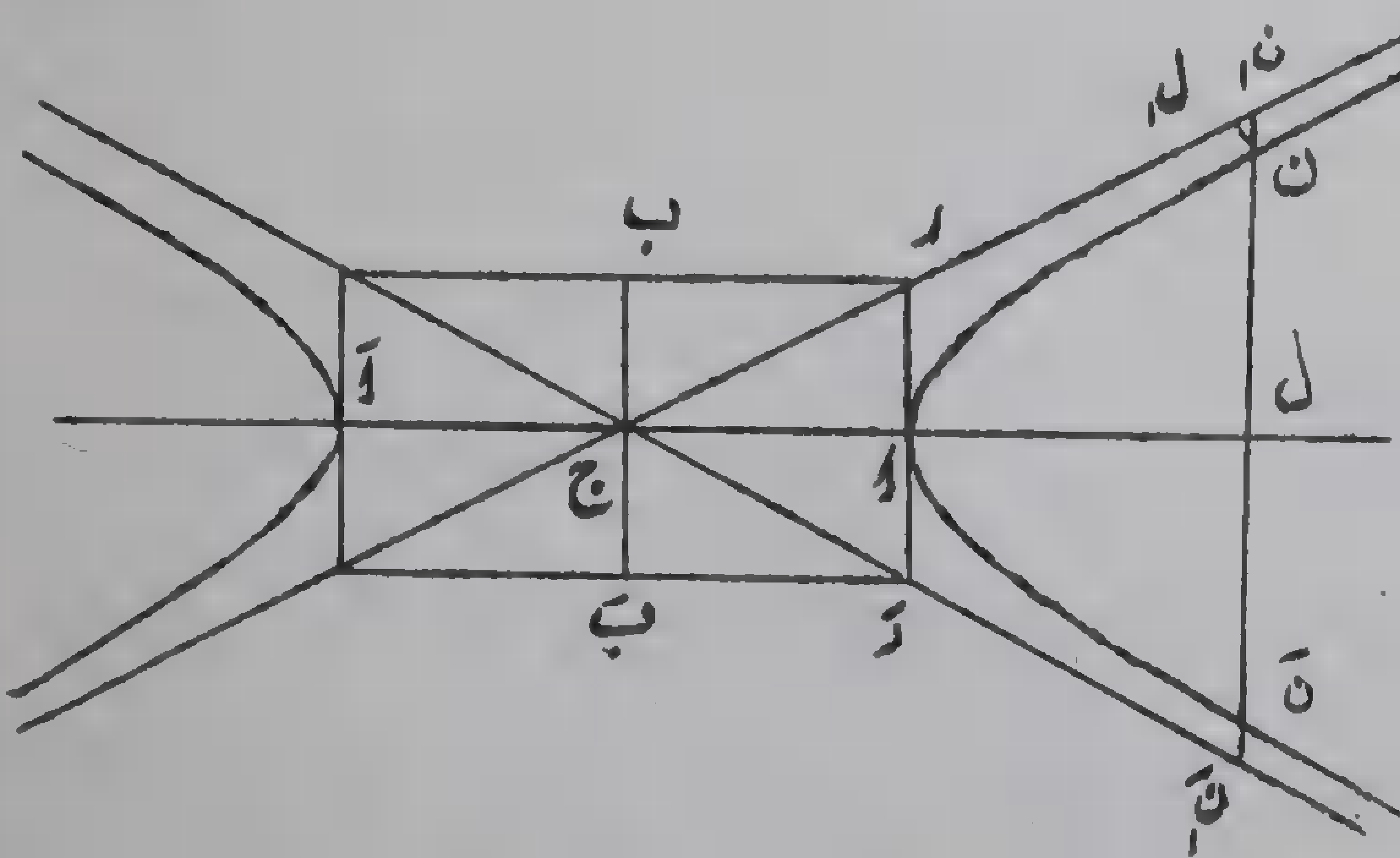
مسئلہ ۴

محاور ا ج اَ، ب ج بَ کے سروں پر عمود قائم کرنے سے ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اگر اس کے قطروں کو لا انتہا خارج کیا جائے اور معین ل ن کو بھی دونوں طرف اتنا خارج کیا جائے کہ وہ قطروں کے نقاط ن۱، نَ۱ پر ملے تو ثابت کرو کہ

سطح ن ن۱ × ن نَ۱ = ج بٗ

نیز ثابت کرو کہ منحنی ہر ایک قطر کے متواتر قریب

آتا جاتا ہے لیکن فی الحقیقت اس کو ملتا نہیں اور آخرالامر قطر اور منحنی کے درمیان فاصلہ اتنا کم رہجاتا ہے کہ وہ ہر ایک محدود طول سے کم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ ا اور ب میں سے جو خط محوروں کے متوازی کھینچے جاتے ہیں وہ ایک دوسرے کو نقطہ ر پر قطع کرتے ہیں اور فرض کرو کہ ن نَ منحنی کو نَ پر ملتا ہے۔

تب لَ، ن نَ اور ن،نَ دونوں کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۱]

∴ ن،نَ = نَ،ن

لیکن ن،ن × ن،نَ = ل ن،^۲ − ن ل^۲ [اقلیدس م ۲ س ۵]

∴ نَ،ن × نَ ن = ن،ل^۲ − ن ل^۲

اب ن،ل^۲ : ج ل^۲ = ار^۲ : ج ا^۲

= ج ب^2 : ج ا^2

نیز ن ل^2 : ال × اَل = ج ب^2 : ج ا^2 [مسئلہ ۳]

یا ن ل^2 : ج ل^2 - ج ا^2 = ج ب^2 : ج ا^2 [اقلیدس م ۲ ش ۶]

تفریق کرنے سے

نِل^2 - ن ل^2 : ج ا^2 = ج ب^2 : ج ا^2

نِل^2 - ن ل^2 = ج ب^2

∴ نِن × نَن = ج ب^2

چونکہ حاصل ضرب نِن × نَن ہمیشہ مستقل رہتا ہے اور اس کا ایک جزو ضربی نَن متواتر بڑھتا ہے اس لئے نِن متواتر گھٹتا ہے اور آخرالامر ہر ایک محدود مقدار سے کم ہو سکتا ہے، نیز اگر ج د پر عمود نِل نکالا جائے تو چونکہ نسبت نِل : نِن مستقل ہے اس لئے نِل متواتر گھٹتا ہے اور آخرالامر کسی محدود طول سے کم ہو جاتا ہے

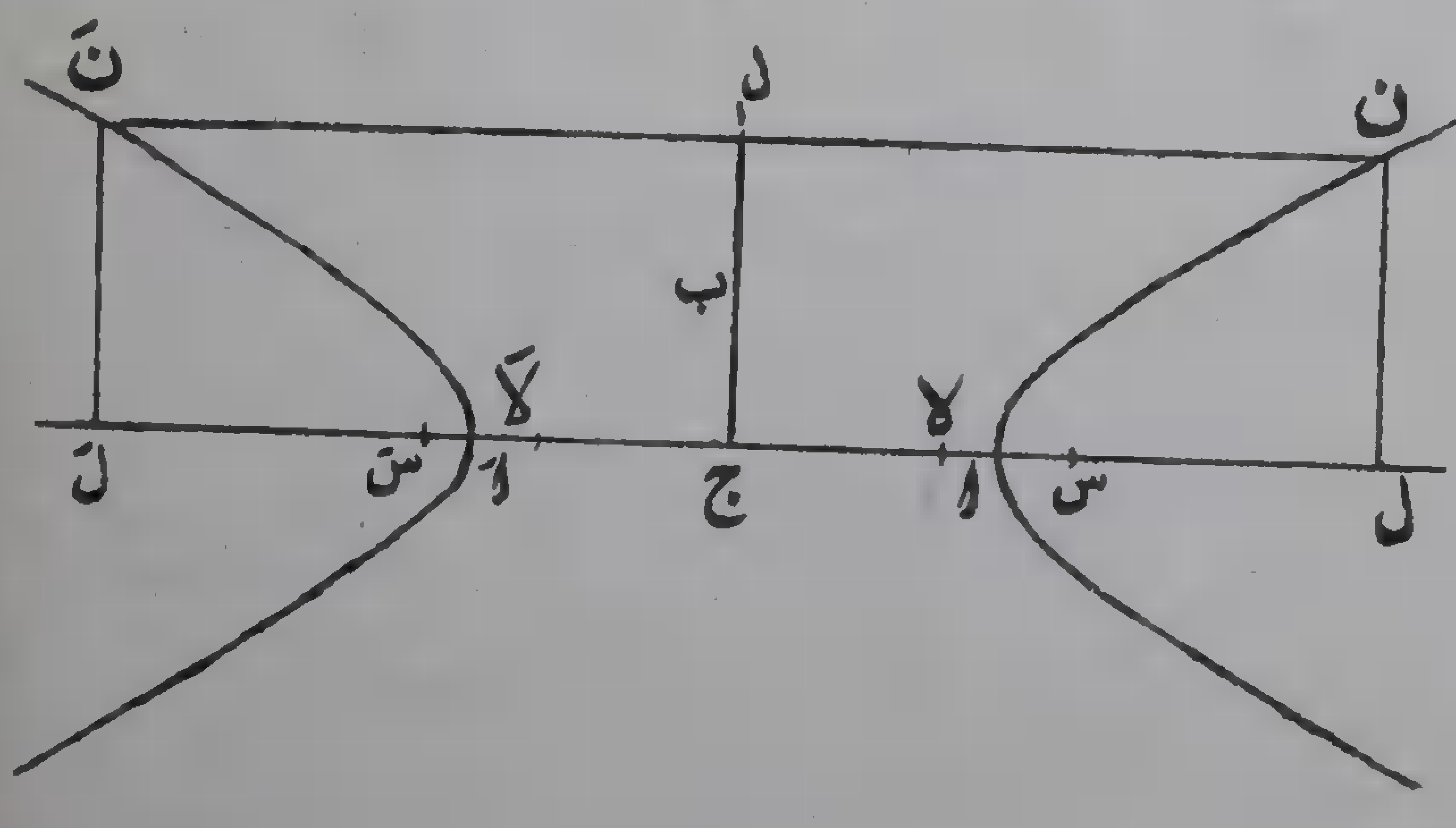
تعریف۔ جب ایک منحنی ایک ثابت مستقیم خط کے متواتر قریب آتا جاتا ہے اور باوجود اس کے اسکو کبھی نہیں ملتا اُس کا فاصلہ اُس خط سے آخرالامر کسی محدود طول سے کم ہو جاتا ہے تو اس مستقیم خط کو منحنی کا مستقیم متقارب کہتے ہیں۔

تعریف۔ جب ایک ہذلولی کے متقارب ایک دوسرے

سے زاویہ قائمہ بنائیں تو منحنی کو قائم ہذلولی یا قائم قطع زائد کہتے ہیں، قائم ہذلولی کے محور مساوی ہوتے ہیں اس لئے اس کو بعض اوقات متساوی الاضلاع ہذلولی بھی کہتے ہیں۔

مسئلہ ۵

قطع زائد بلحاظ مزدوج محور کے متشاکل ہے اور اس کا ایک اور ماسکہ اور مرتب ہے۔
نیز منحنی کے سب وتروں کی تنصیف مرکز پر ہوتی ہے



معین ن ل کھینچو اور ج ل کو ج لَ کے مساوی لو
چونکہ ن قطع زائد پر واقع ہے اسلئے ج ل > ج ا
∴ ج لَ > ج اَ

اس لئے اگر نقطہ لَ پر ایک عمود قائم کیا جائے تو وہ قطع زائد کو قطع کرے گا۔

فرض کرو کہ یہ عمود قطع زائد کو نَ پر کاٹتا ہے

تب نَ لَ۲ : ال َ × اَلَ = ن ل۲ : ال × اَل [مسئلہ ۳]

لیکن اَلَ = ال اور الَ = اَل

∴ الَ × اَلَ = ال × اَل

∴ نَ لَ۲ = ن ل۲

∴ نَ لَ = ن ل

ن نَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ ج ب یا ج ب ممدودہ کو لِ پر ملتا ہے۔

اس لئے نَ لِ ن محور کے متوازی ہے اور اس لئے ب ج پر عمود ہے۔

اور ن لِ = نَ لِ

اس سے معلوم ہوا کہ کسی نقطہ ن کے مقابل ج ب کے دوسری طرف قطع زائد پر ایک اور نقطہ نَ ایسا ہے کہ ج ب اور ن نَ کا نقطہ تقاطع ن نَ کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتا ہے یعنی ہذلولی بلحاظ مزدوج محور کے متشاکل ہے۔

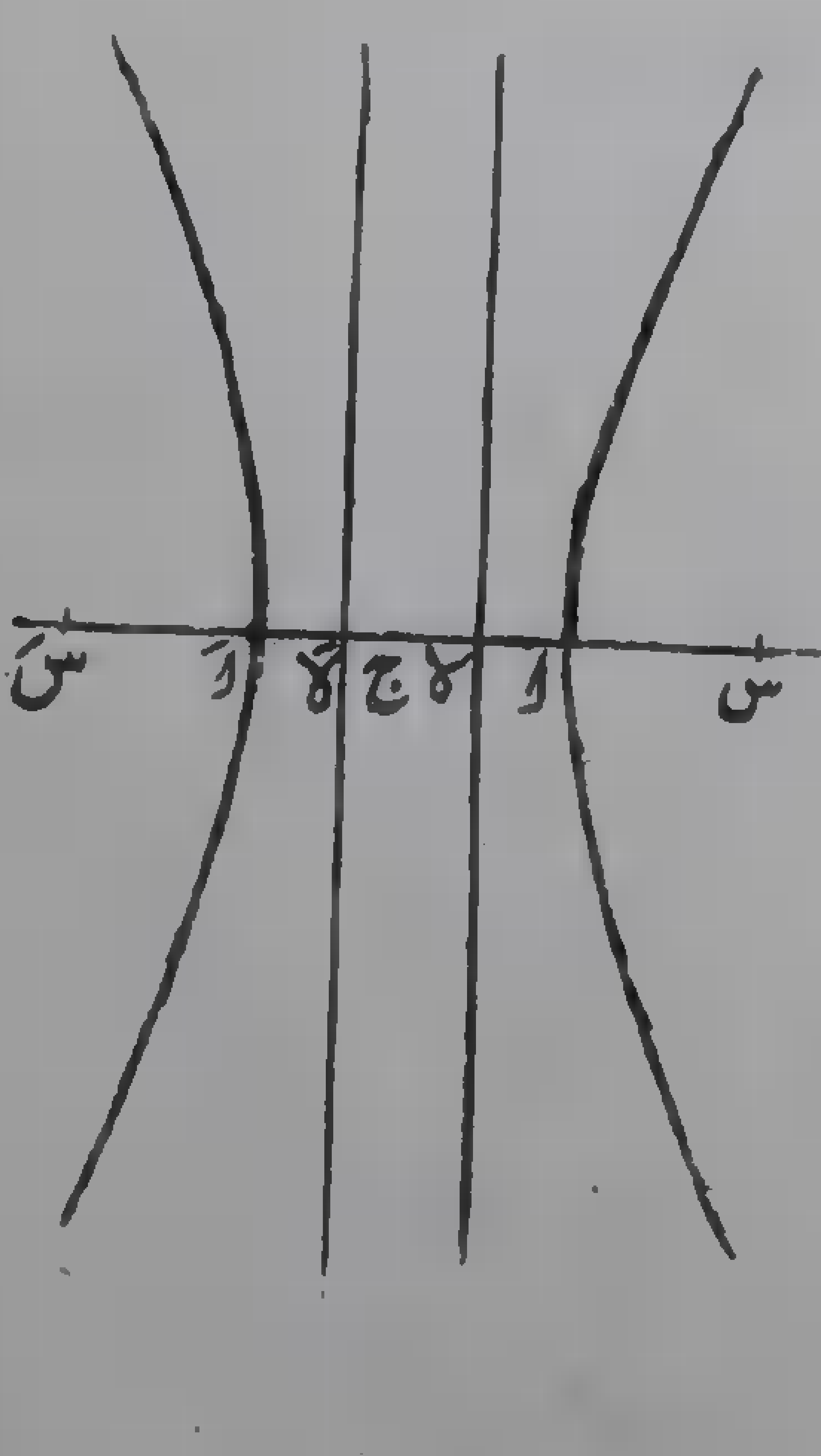
اگر ہم ج سَ کو ج س کے مساوی بنائیں اور

ج لاَ کو ج لا کے اور لاَ میں سے ایک ایسا خط کھینچیں جو ااَ پر عمود ہو تو اس خط کو مرتب اور سَ کو ماسکہ مان کر ہم قطع زائد کو مرتسم کر سکتے ہیں جہاں خروج المرکز کی قیمت وہی ہے جو پہلے تھی

مسئلہ ۶

س ا = ر × ا لا ' ج ا = ر × ج لا ' ج س = ر × ج ا '

اور ج ا² = ج س × ج لا



چونکہ نقاط ا اور اَ ہذلولی پر ہیں [تعریف]

∴ س ا = ر × ا لا [تعریف]

س اَ = ر × اُ لاَ [تعریف]

= ر × ا لاَ

عمل تفریق سے ا اَ = ر × لا لاَ

∴ ج ا = ر × ج لا (۱)

عمل جمع سے س سَ = ر × ا اَ

∴ ج س = ر × ج ا (۲)

∴ ج ا² = ج س × ج لا (۳)

نوٹ ۔ اس شکل میں خروج المرکز تقریباً ۲ ، ۲ ہے ، مسئلہ ۵ کی شکل میں خروج المرکز صرف ا ، ا ہے ، نسبت کی تبدیلی کا اثر نقاط س، ا، لا کے اضافی مقامات پر، نیز منحنی کی عام شکل پر ان مسائل کی اشکال کو باہم مقابلہ کرنے سے خوب واضح ہوتا ہے ، اس شکل میں ج ب = ۲ × ج ا اور دفعہ گزشتہ کی شکل میں ج ا = ۲ × ج ب۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۶

۱۔ اگر ایک متقارب مرتب کو ع پر ملے تو ثابت کرو کہ ج ع = ج ا اور زاویہ ج ع س قائمہ ہے ۔

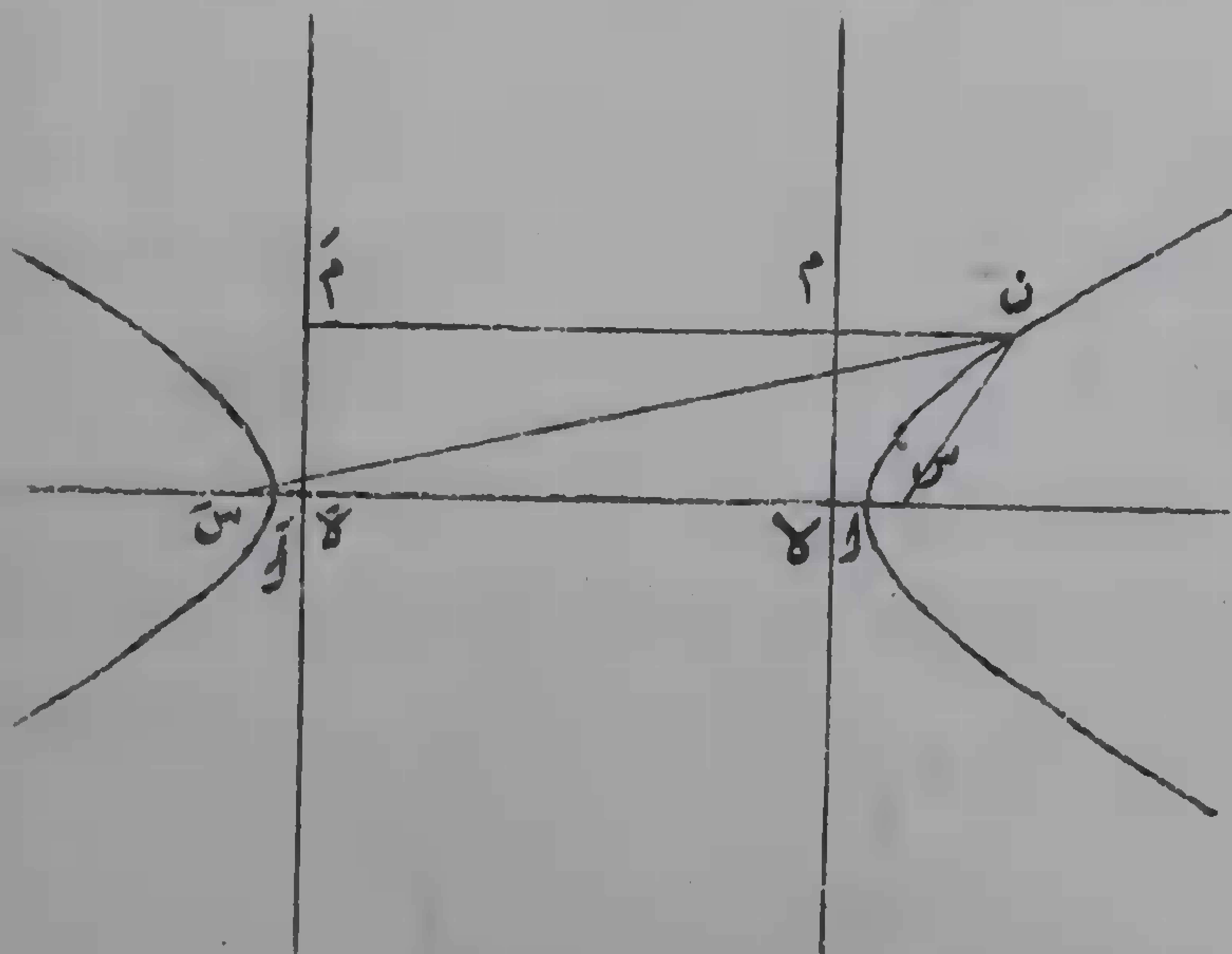
۲۔ اگر ن نَ کو ایک متقارب کے متوازی کھینچا جاے اور وہ مرتب کو نَ پر ملے تو ثابت کرو کہ ن نَ = س ن

۳۔ قاطع اور مزدوج محور دئے ہوئے ہیں ، ماسکہ اور مرتب دریافت کرو۔

۴۔ اگر ا اَ کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ مرتبوں کو اُنہیں نقاط پر قطع کرے گا جہاں منحنی کے متقارب قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ ۷

سَ ن ـ س ن = ا اَ قطع زائد کی آلی ترکیب



مرتبوں پر عمود ن م مَ نکالو۔

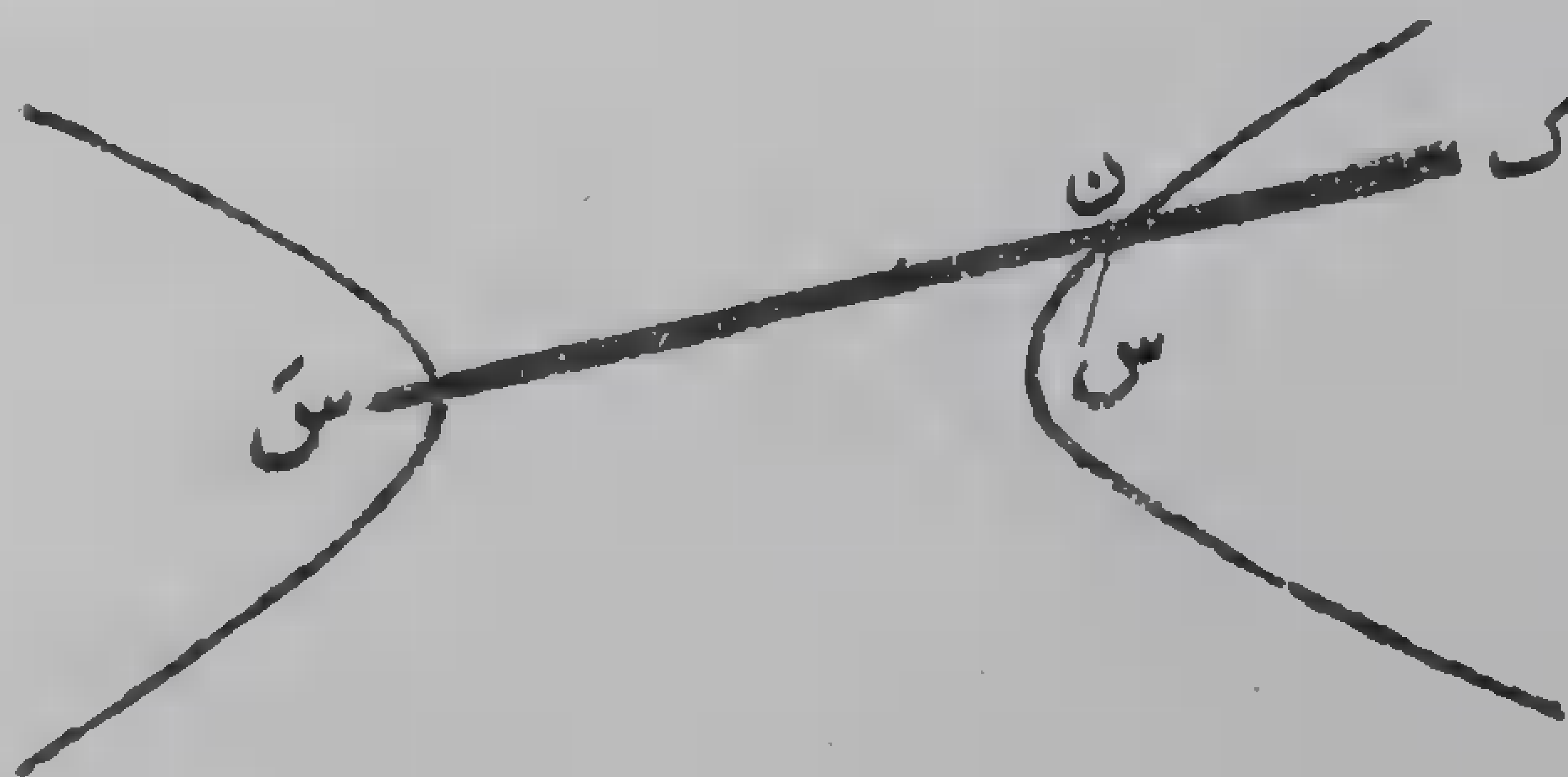
تب س ن = ر × ن م

اور سَ ن = ر × ن مَ

∴ سَ ن ـ س ن = ر × م مَ

= ر × لا لاَ

= ا اَ



اس سے قطع زائد کو مرتسم کرنے کی آلی ترکیب معلوم ہوتی ہے سَ ک ایک لکڑی کی سلاخ ہے جو سَ پر قبضہ کے ذریعہ وصل کر دی گئی ہے، اور ایک رسی س ن ک نقاط س اور ک پر بندھی ہے اس کو نقطہ ن پر ایک پنسل کے ذریعہ تانے رکھتے ہیں۔

سَ ن + ن ک = ایک مستقل مقدار

س ن + ن ک = ایک مستقل مقدار

∴ سَ ن - س ن = ایک مستقل مقدار

مشقی مثالیں مسئلہ ۷

۱- ایک دائرہ دو ثابت دائروں کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق یا تو قطع ناقص ہے یا ہذلولی۔

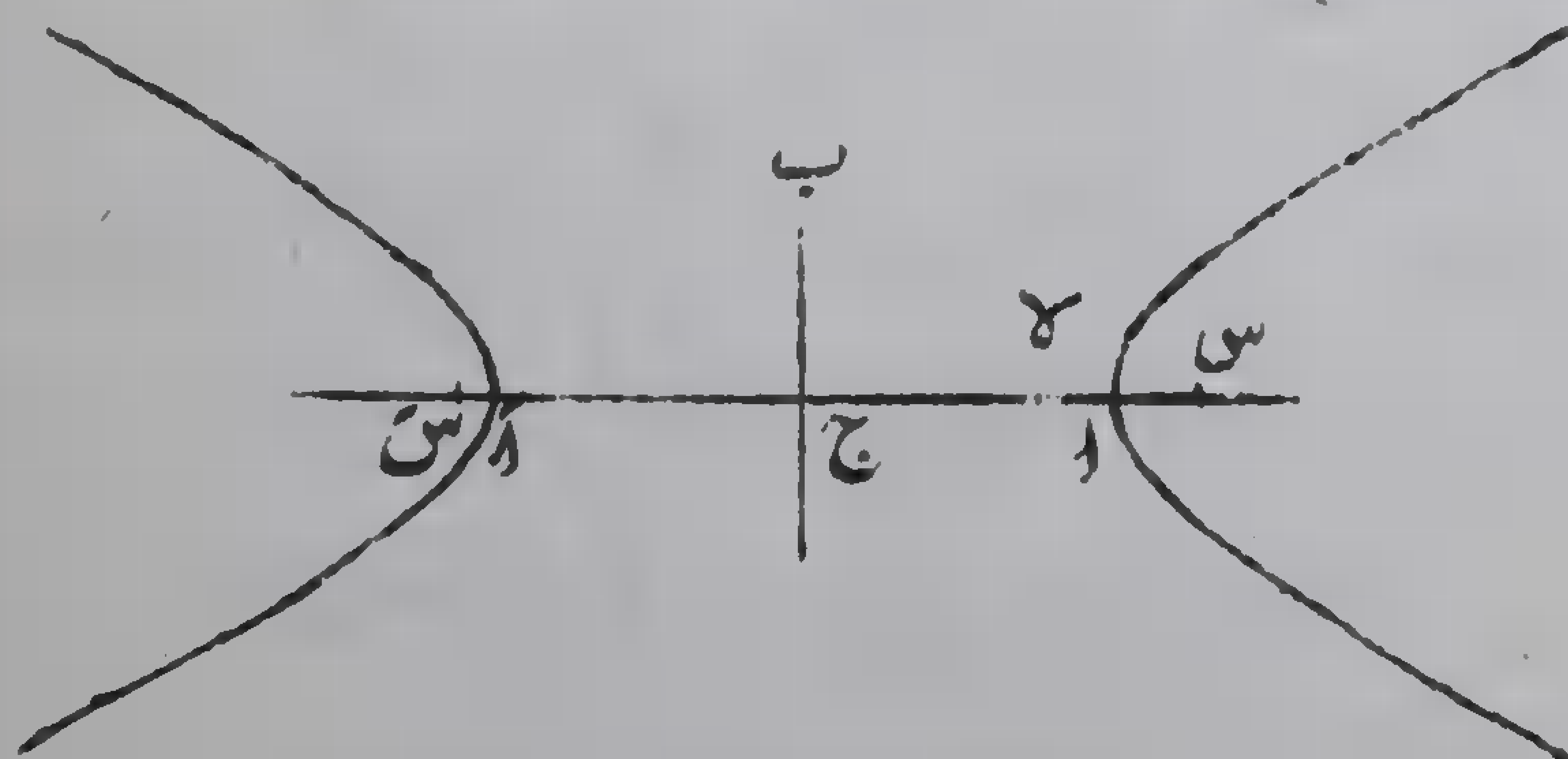
۲- قطع ناقص کا ایک ماسکہ اور منحنی پر کے دو نقاط دئے ہوئے

ہیں ثابت کرو کہ دوسرے ماسکہ کا طریق ایک قطع زائد ہے۔

نوٹ۔ اگر ایک لکڑی کے مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹا جائے جو قاعدہ پر عمود ہو تو تراش قطع زائد یا ہذلولی ہوگی، ان تراشوں کو استعمال کرنے سے اس باب کی کل شکلوں کو کھینچا گیا ہے، تراش ہائے مخروطی کے لئے دیکھو اگلے باب کا مسئلہ ۳۔

مسئلہ ۸

ج ب^2 = ج س^2 - ج ا^2 = س ا × س اَ



ج س : ج ا = س ا : ا لا [مسئلہ ۶]

∴ ج س + ج ا : ج ا = س ا + ا لا : ا لا

= س لا : ا لا (۱)

ج س : ج ا = س اَ : اَ لا [مسئلہ ۶]

∴ ج س - ج ا : ج ا = س اَ - اَ لا : اَ لا

= س لا : اَ لا (۲)

اس لئے (۱) اور (۲) کو باہم ضرب دینے سے

ج س^2 - ج اَ^{2} : ج ا^2 = س لا^2 : ا لا × اَ لا

= ج ب^2 : ج ا^2 [مسئلہ ۳]

∴ ج س^2 - ج ا^2 = ج ب^2 = ا س × اَ س [اقلیدس م ۲ ش ۵]

مشقی مثالیں مسئلہ ۸

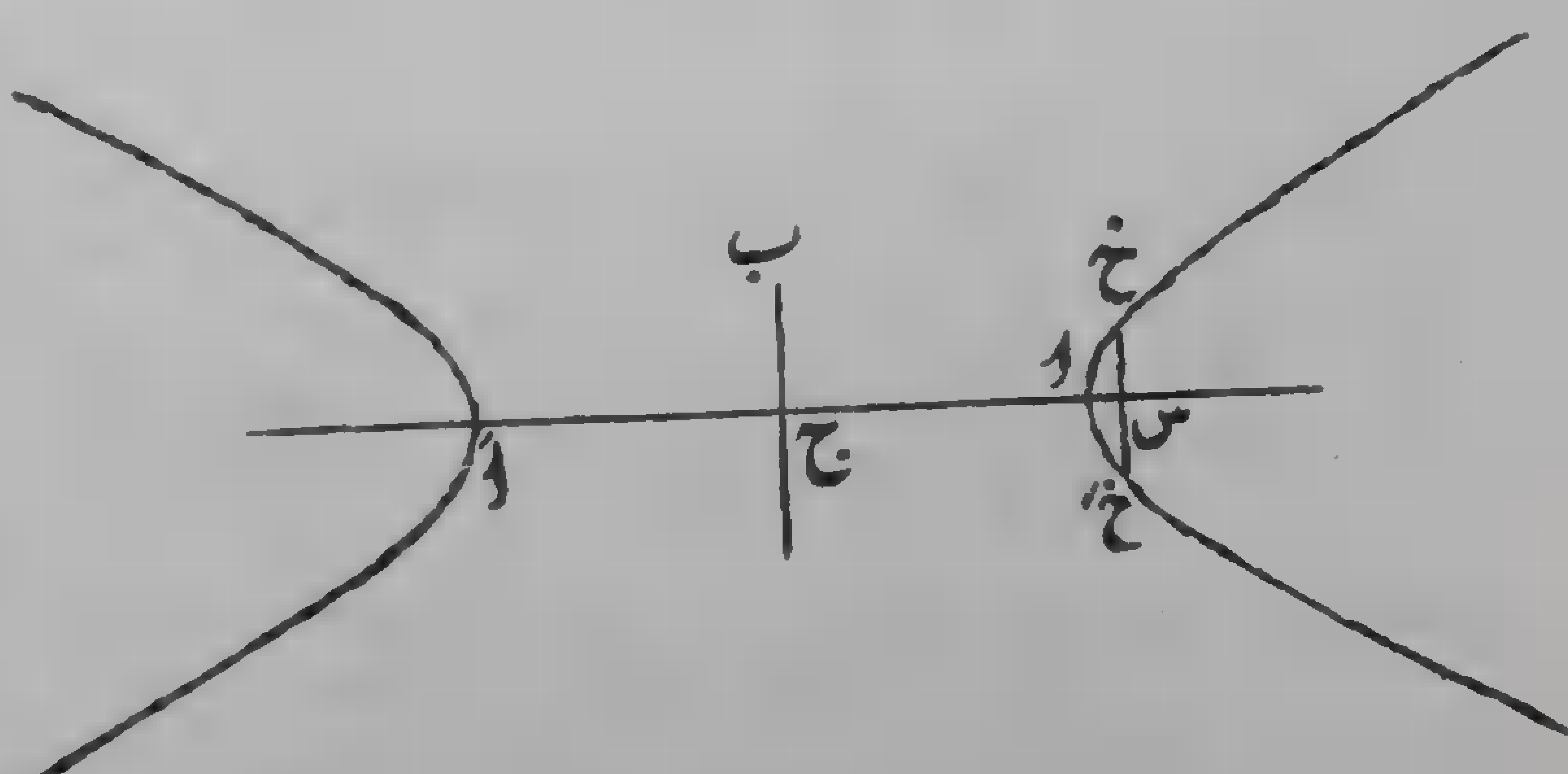
۱- قائم قطع زائد میں ر ۲ ر ۲ ج س^2 = ۲ ا ج^2 اور ج س = ۲ ج لا

۲- اگر متقارب مرتب کو ع اور راس پر کے مماس کو د پر ملے تو س ع = ب ج اور س د متوازی ہے ا ع کے

تعریف - ماسکہ میں سے جو دگنا معین گذرتا ہے اس کو ہم وتر خاص (خ خَ) کہیں گے۔

مسئلہ ۹

س خ × ج ا = ج ب^2



س خ^2 : ا س × اَ س = ج ب^2 : ج ا^2 [مسئلہ ۳]

لیکن ا س × اَ س = ج ب^2 [مسئلہ ۸]

∴ س خ^2 : ج ب^2 = ج ب^2 : ج ا^2

∴ س خ : ج ب = ج ب : ج ا

∴ س خ × ج ا = ج ب^2

مشقی مثالیں مسئلہ ۹

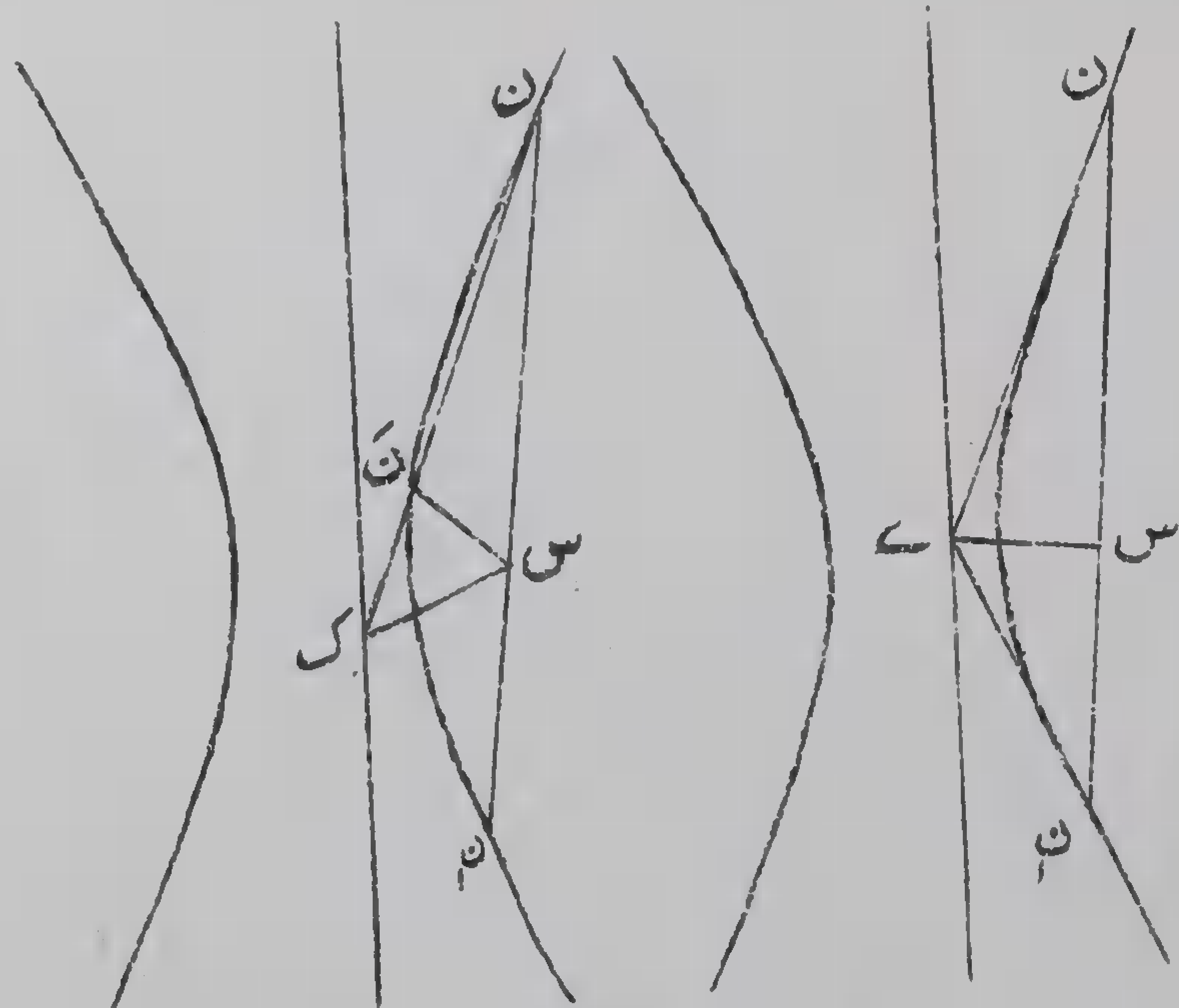
۱۔ اس مسئلہ کو مسائل ۶ اور ۸ کی مدد سے ثابت کرو

۲۔ قائم قطع زائد کی صورت میں ثابت کرو کہ س خ = ج ا

مسئلہ ۱۰

اگر ن پر کا مماس مرتب کو ے پر ملے تو ثابت کرو کہ ن س ے زاویہ قائمہ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگر ایک ماسکی وتر کے سروں پر مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک دوسرے کو مرتب پر قطع کریں گے۔



قطع زائد پر ن کے قریب ایک نقطہ نَ لو اور فرض
کرو کہ وتر ن نَ مرتب کو ک پر ملتا ہے، ن س
کو ن۱ تک خارج کرو تب ک س زاویہ نَ س ن۱
کی تنصیف کرے گا [مسئلہ ۲]

جب نَ، ن پر منطبق ہوتا ہے (جیسا کہ شکل ۲ میں) تو
ن نَ ک مماس ن سے بن جاتا ہے اور س ک،
س ے پر منطبق ہوتا ہے اور زاویہ نَ س ن۱ دو قائموں
کے برابر ہو جاتا ہے، اُس وقت ن س ے ایک
قائمہ کے مساوی ہوتا ہے۔

اسلئے زاویہ ے س ن قائمہ ہے اور ے ن، ن۱ پر
کا مماس ہے یعنی ن اور ن۱ پر کے مماس ایک

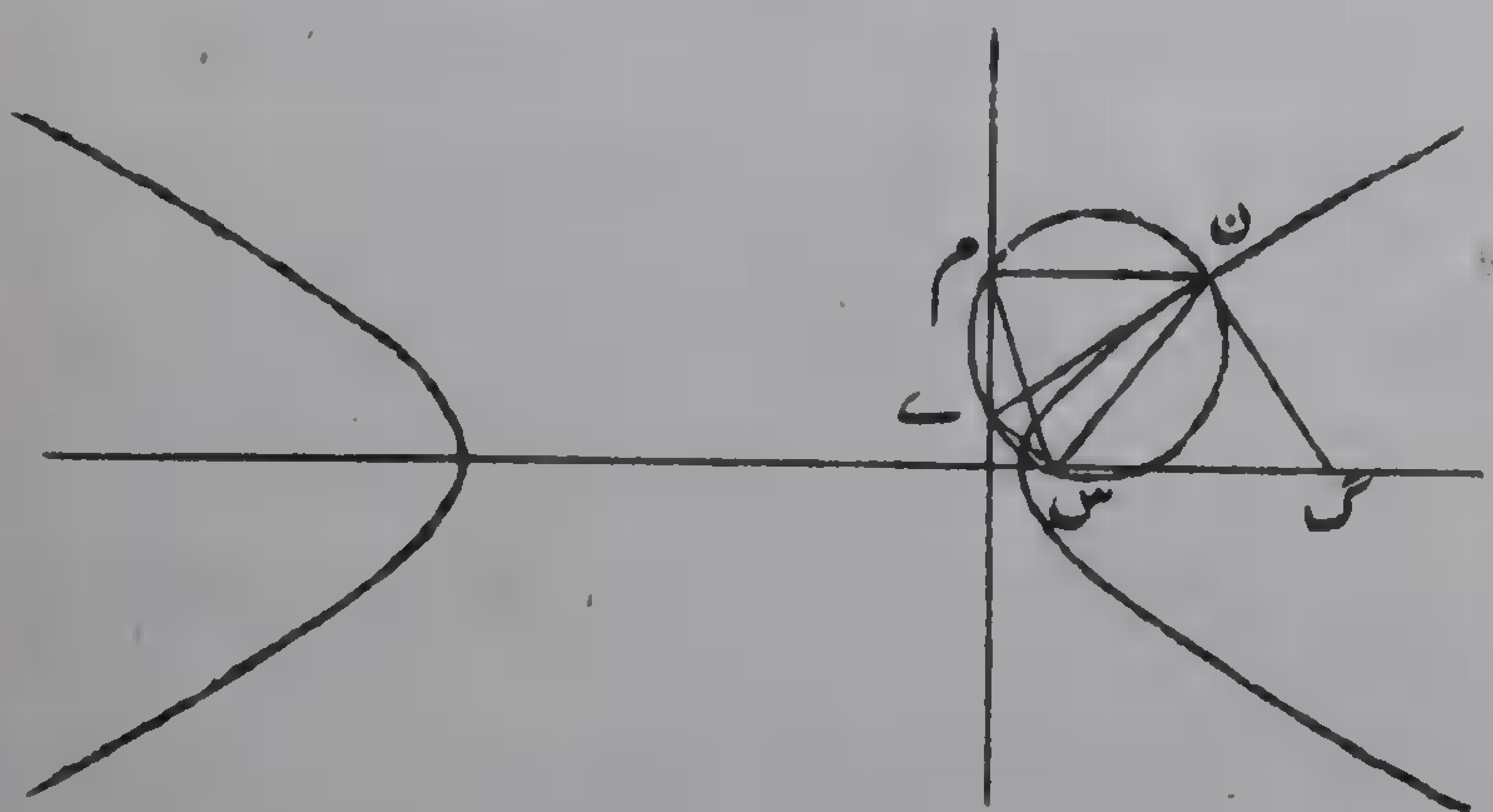
دوسرے کو مرتب پر قطع کرتے ہیں۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۰

اگر سے ن اور سے ن، ممدودہ وتر خاص کو د اور د، پر ملیں تو ثابت کرو کہ س د = س د،

مسئلہ ۱۱

اگر ن پر کا عماد، قاطع محور کو گ پر ملے تو س گ = ر × س ن



مماس ن سے کھینچو، س سے کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م نکالو، س م کو ملاؤ۔

زوایا ے م ن اور ے س ن قائمے ہیں [مسئلہ ۱۰]

اس لئے اگر ے ن کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا

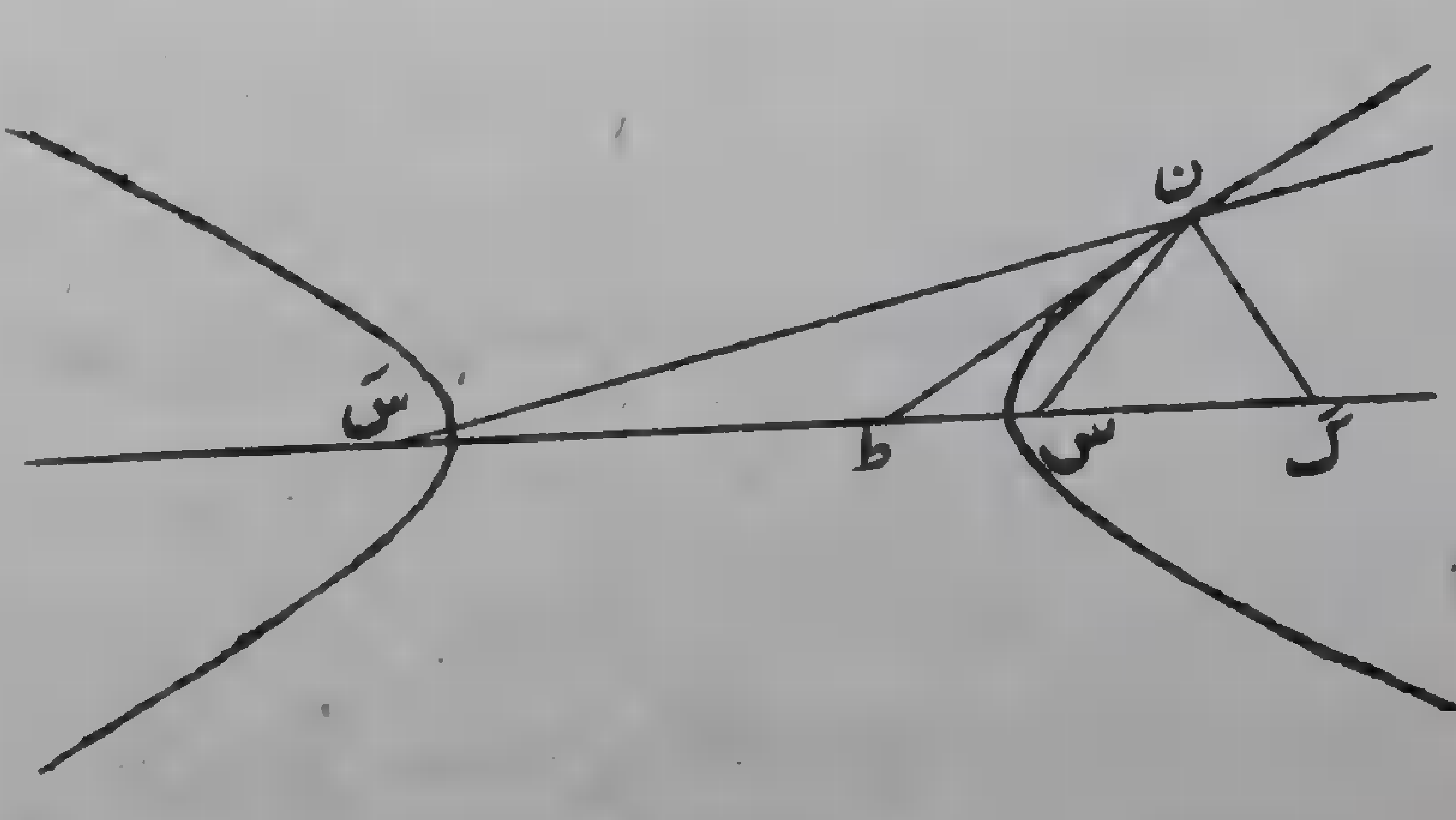
جائے تو وہ سؔ اور م میں سے گزرے گا [اقلیدس م ۳ ش ۳]
چونکہ ٹ ن گ زاویہ قائمہ ہے اسلئے ن گ دائرہ
کو مس کرتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۱۶]
اسلئے زاویہ سؔ ن گ = زاویہ سؔ م ن چونکہ یہ متبادل
قطعہ میں واقع ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳۲]
نیز زاویہ گ س ن = زاویہ س ن م [اقلیدس م ۱ ش ۲۹]
اسلئے مثلثات س ن گ، ن م س متشابہ ہیں

∴ س گ : س ن = س ن : ن م

∴ س گ = ر × س ن

مسئلہ ۱۲

اگر قطع زائد کے کسی نقطہ ن پر مماس اور عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وہ اس نقطہ کے ماسکی فاصلوں کے درمیانی زاویہ کے بالترتیب داخلی اور خارجی منصف ہونگے۔



فرض کرو کہ ط ن مماس اور ن گ عماد ہے اور یہ قاطع محور کو ط اور گ پر ملتے ہیں۔

س گ = ر × س ن [مسئلہ ۱۱]

اور سَ گ = ر × سَ ن

∴ س گ : سَ گ = س ن : سَ ن

اس لئے ن گ زاویہ س ن سَ کی خارجاً تنصیف کرتا ہے۔ [اقلیدس م ۶ مش ۱۷]

چونکہ س ن ط، سَ ن ط میں سے ہر ایک خارجی زاویہ کے نصف کا متمم ہے۔

اس لئے ن ط زاویہ س ن سَ کی داخلاً تنصیف کرتا ہے۔

نوٹ۔ اس مسئلہ کا ہلیلجی کے مسئلہ ۱۳ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۲

۱۔ ہذلولی کا ایک ماسکہ معلوم ہے نیز منحنی پر کا ایک نقطہ اور اُس نقطہ پر کا مماس دیا ہوا ہے، دوسرے ماسکہ کا طریق دریافت کرو۔

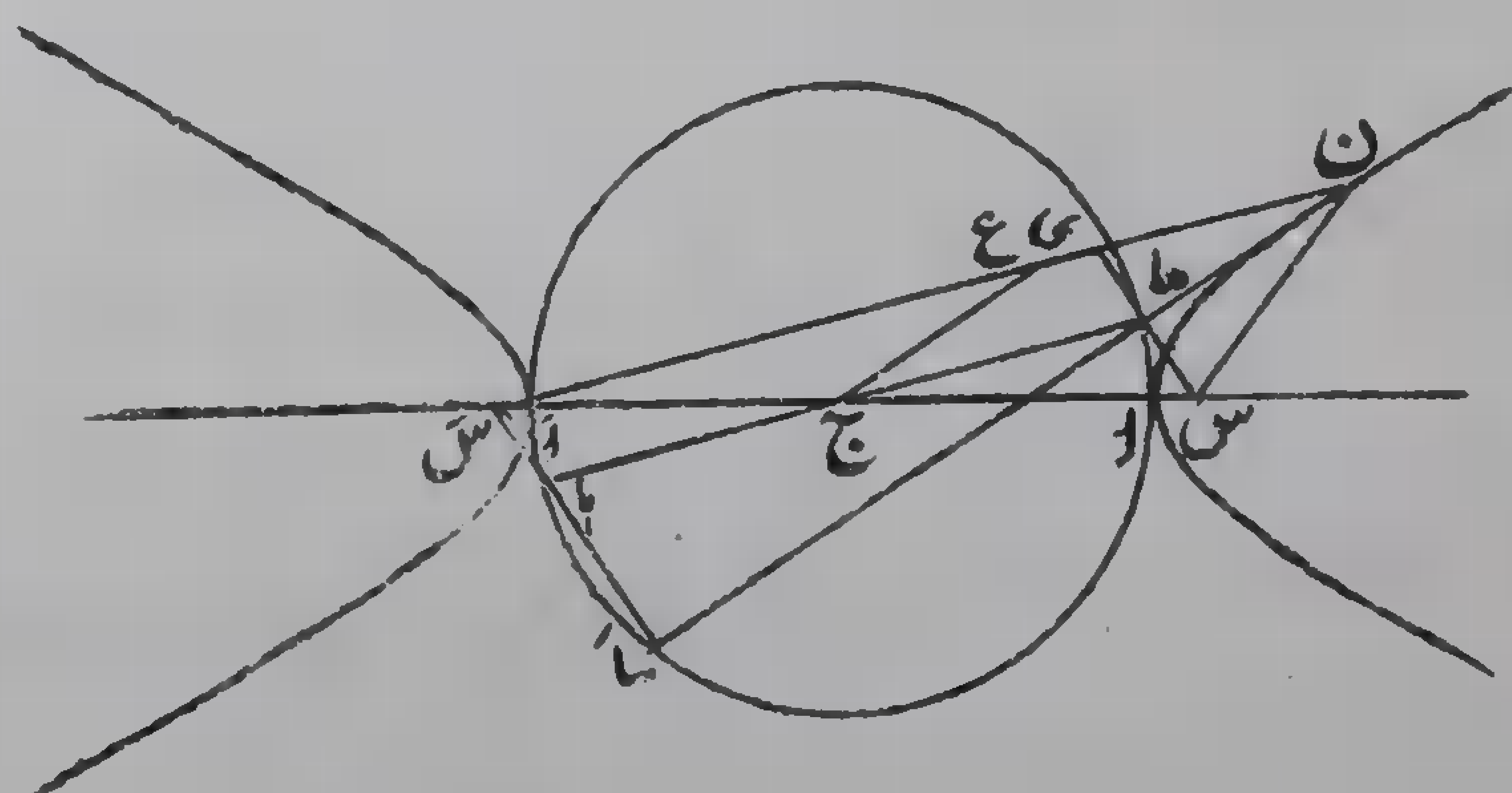
۲۔ اگر ایک ہلیلجی اور ایک ہذلولی کے ماسکے ایک ہی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳

اگر ہلیلجی کے کسی نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے

اور ماسکوں سے مماس پر عمود (س ما، سَ مَا)
نکالے جائیں تو عمودوں کے پائیں ایک دائرہ کے
محیط پر واقع ہوں گے جس کا قطر ا اَ ہوگا۔
نیز اگر ج ع، ن پر کے مماس کے متوازی ہو
اور سَ ن کو ع پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن ع
= ج ا

نیز س ما × سَ مَا = ج ب^{۲}



س ما کو اتنا خارج کرو کہ وہ سَ ن کو ی پر ملے
مثلثات مان س اور مان ی میں ن ما
مشترک ہے، زاویے ن ما س اور ن ما ی
قائمے ہیں اور زاویہ مان س = زاویہ مان ی
[مسئلہ ۱۲]

∴ س ما = ما ی، س ن = ن ی [اقلیدس م ۱ ش ۲۶]
اسلئے سَ ی متوازی ہے ج ما کے [اقلیدس م ۶ ش ۲]

اس لئے ج ما = $\frac{۱}{۲}$ سَ ی

= $\frac{۱}{۲}$ (سَ ن - س ن)

= $\frac{۱}{۲}$ ا اَ [مسئلہ ۷]

= ج ا

اس لئے ما اُس دائرہ پر واقع ہے جس کا قطر ا اَ ہے
اسی سے مَا امدادی دائرہ پر واقع ہے
نیز ماج ع ن ایک متوازی الاضلاع ہے اسلئے

ن ع = ج ما = ج ا

فرض کرو کہ مَا سَ دائرہ کو ما، پر ملتا ہے، ما ما، کو ملاؤ اب چونکہ زاویہ ما مَا ما، قائمہ ہے اس لئے ما ما، دائرہ کے مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔

[اقلیدس م ۳ ش ۳۱]

س ما = سَ ما، [اقلیدس م ۱ ش ۴]

س ما × سَ مَا = سَ ما، × سَ مَا

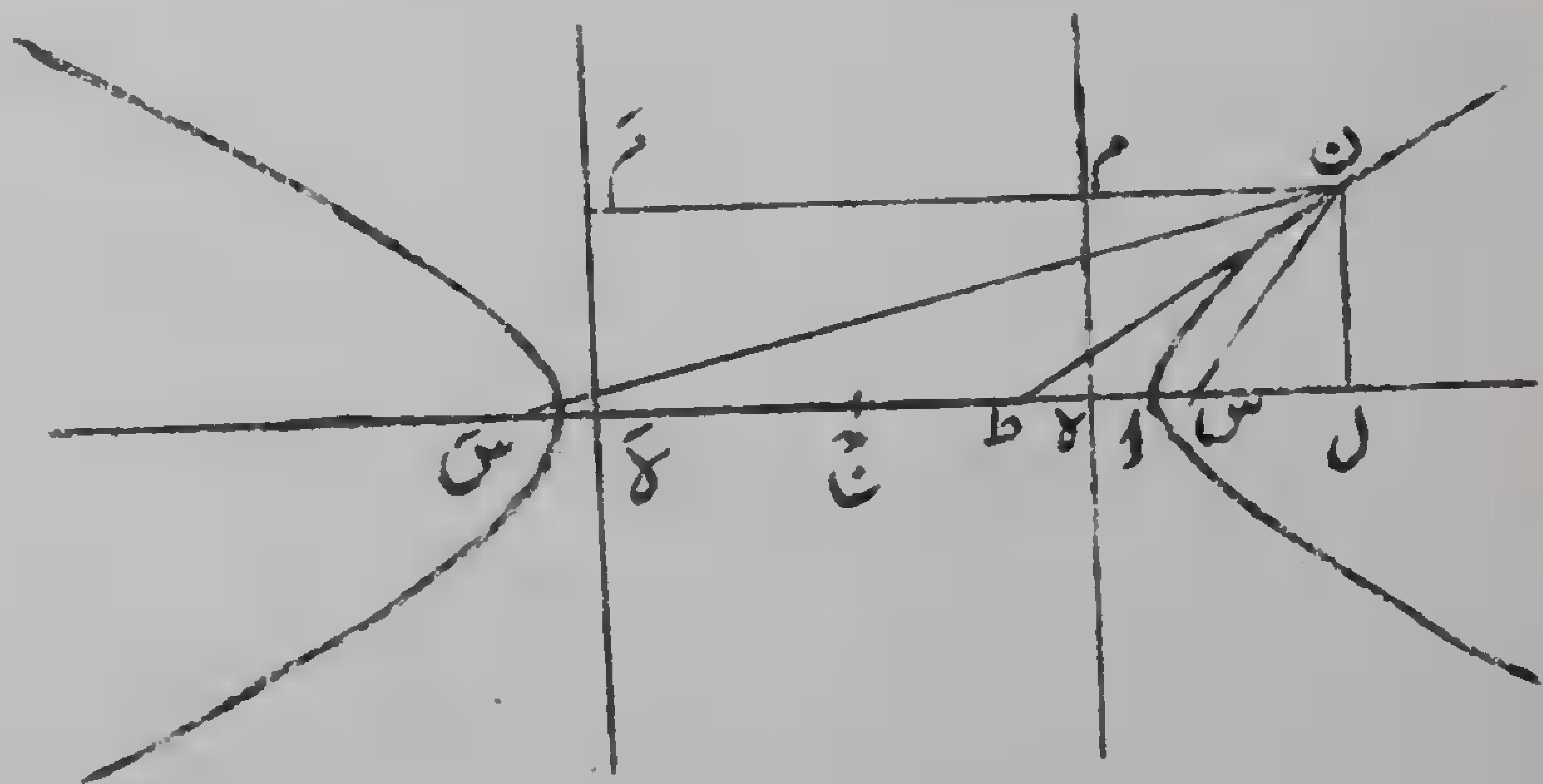
= اسَ × سَ اَ [اقلیدس م ۳ ش ۳۵]

= ج ب^{۲} [مسئلہ ۸]

مسئلہ ۱۴

اگر ن پر کا مماس قاطع محور کو ط پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ل × ج ط = ج ا^{۲}



مرتبوں پر عمود ن م مَ کھینچو

س ن، سَ ن کو ملاؤ

تب چونکہ ن ط زاویہ س ن سَ کی تنصیف کرتا ہے [مسئلہ ۱۳]

∴ س ط : سَ ط = س ن : سَ ن [اقلیدس م ۶ ش ۱]

= ن م : نَ م

= ل لا : ل لاَ

∴ س ط + سَ ط ~ س ط = ل لا + ل لاَ

: ل لاَ ~ ل لا

∴ ۲ ج س : ۲ ج ط = ۲ ج ل : ۲ ج لا

∴ ج ل × ج ط = ج س × ج لا

= ج ا² [مسئلہ ۶]

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۳

جو مشقی مثالیں قطع ناقص کے بارے میں صفحہ (۸۱ و ۸۲) پر دی گئی ہیں وہ قطع زائد کی صورت میں بھی درست ہیں سوائے نمبر ۸ کے

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۴

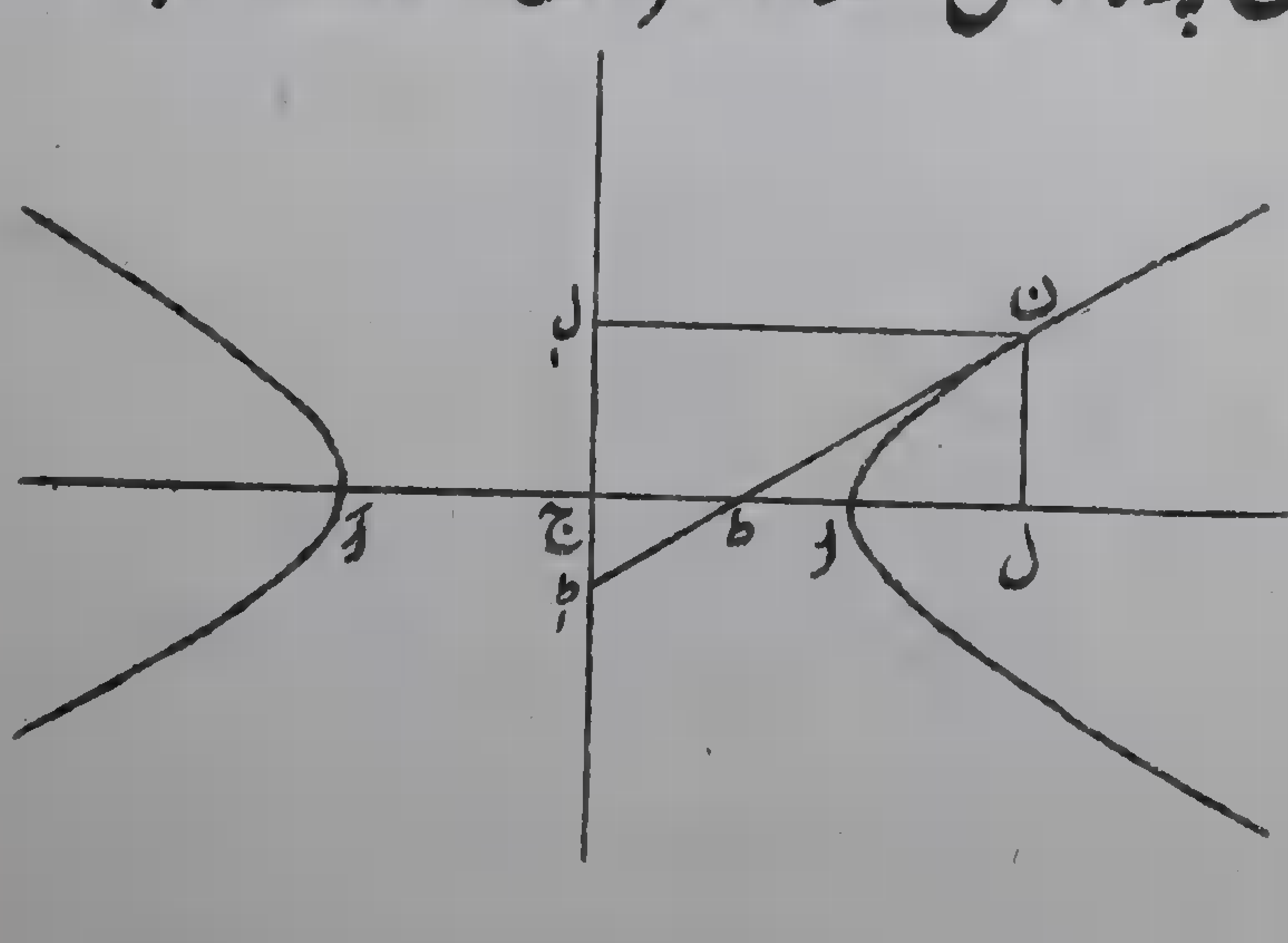
۱۔ اس طریقہ سے قطع ناقص کے مسئلہ ۱۶ کو ثابت کرو

۲۔ اگر محور پر عمود ط ن قایم کیا جائے جو امدادی دائرہ کو ن پر ملے تو ثابت کرو کہ ل ن دائرہ کا مماس ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ ج ل × ل ط = ا ل × ل اَ

مسئلہ ۱۵

اگر ن پر کا مماس ممدودہ مزدوج محور کو ط پر ملے اور اگر



نقطہ ن سے مزدوج محور پر عمود ن ل۱ نکالا جائے تو
ثابت کرو کہ

ج ل۱ × ج ط۱ = ج ب^{2}

معین ن ل کھینچو
تب متشابہ مثلثوں سے

ط ل : ج ط = ن ل : ج ط۱

∴ ط ل × ج ل : ج ط × ج ل = ن ل^{2} : ج ط۱ × ن ل

∴ ط ل × ج ل : ج ا^{2} = ن ل^{2} : ج ط۱ × ج ل۱ [مسئلہ ۱۴]

لیکن ط ل × ج ل = ج ل^{2} − ج ط × ج ل

= ج ل^{2} − ج ا^{2} [مسئلہ ۱۴]

= ا ل × اَ ل [اقلیدس م ۲ ش ۵]

∴ ا ل × اَ ل : ج ا^{2} = ن ل^{2} : ج ط۱ × ج ل۱

اس لیئے تبدیل نسبت سے

ا ل × اَ ل : ن ل^{2} = ج ا^{2} : ج ط۱ × ج ل۱

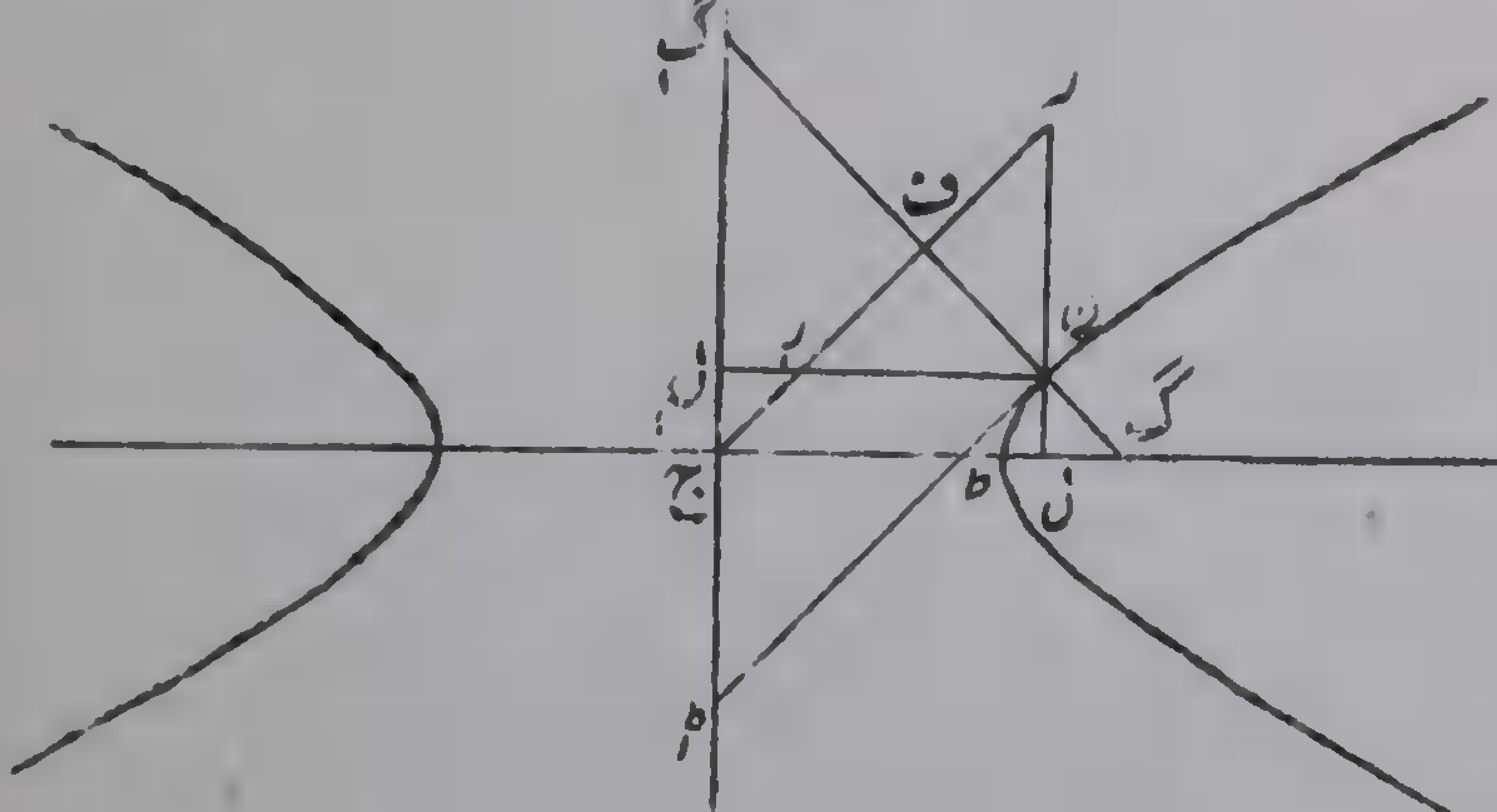
لیکن ا ل × اَ ل : ن ل^{2} = ج ا^{2} : ج ب^{2} [مسئلہ ۳]

∴ ج ط۱ × ج ل۱ = ج ب^{2}

مسئلہ ۱۶

اگر مرکز ج میں سے ن پر کے مماس کے متوازی
ایک خط کھینچا جائے اور ن سے اس خط پر عمود

ن ف نکالا جائے اور اگر ن پر کا عماد مزدوج محور کو گ، پر ملے تو ن ف × ن گ = ج ب۲
اور ن ف × ن گ، = ج ا۲

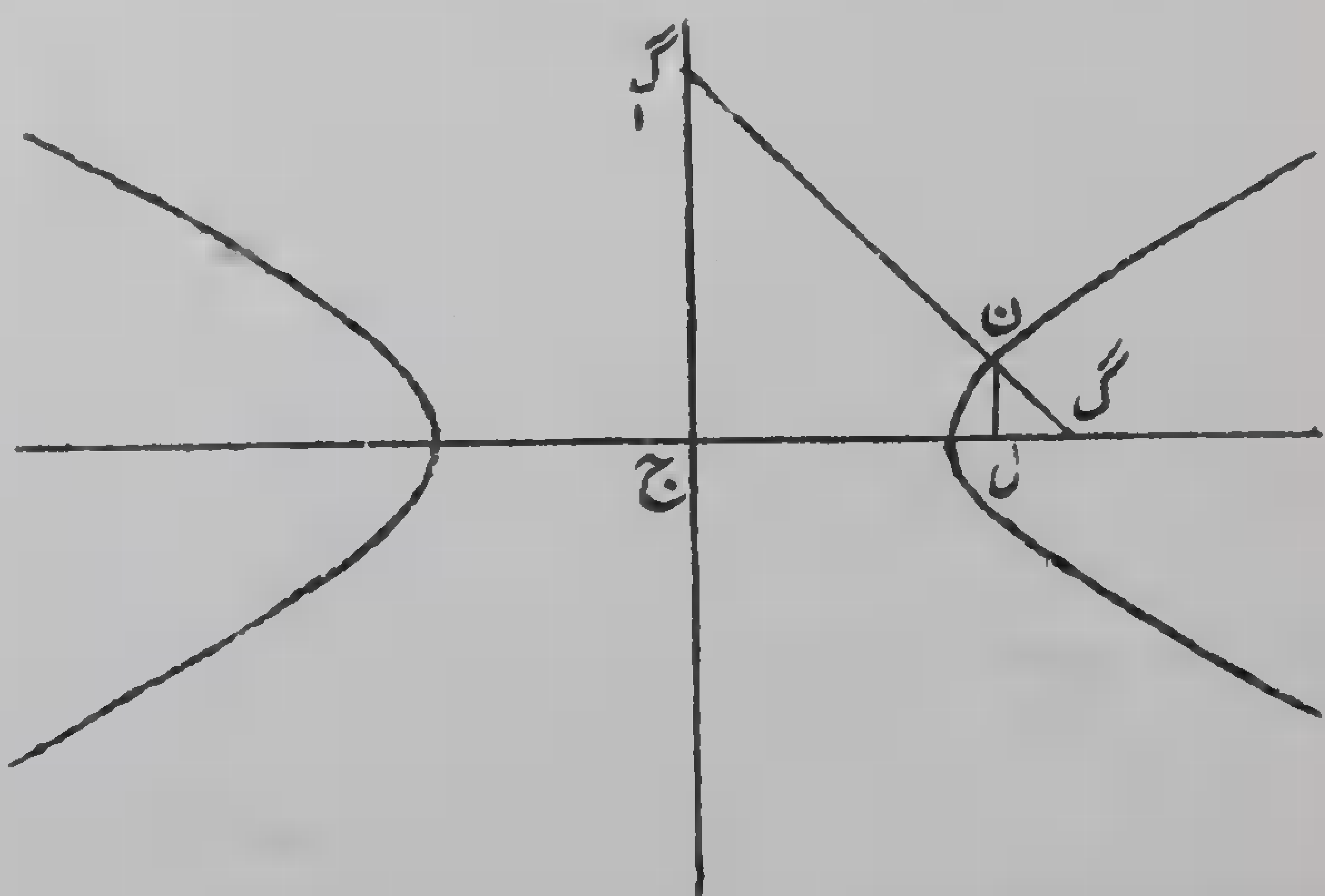


محوروں پر عمود رن ل اور ن ر، ل، کھینچو اور فرض کرو کہ وہ ج ف کو ر اور ر، پر ملتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ن پر کا مماس محوروں کو ط اور ط، پر ملتا ہے۔
تب چونکہ ل اور ف پر کے زاویے قائمے ہیں اسلیئے ایک دائرہ گ ل ف ر کے گرد کھینچ سکتا ہے [اقلیدس م ۳ ش ۲۲]
اسلیئے ن گ × ن ف = ن ل × ن ر [اقلیدس م ۳ ش ۳۵]
= ج ل، × ج ط، = ج ب۲ [مسئلہ ۱۵]
نیز چونکہ ف اور ل، پر کے زاویے قائمے ہیں اس لئے گ، ف ر، ل، کے گرد ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔
∴ ن ف × ن گ، = ن ل، × ن ر، [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]
= ج ل × ج ط = ج ا۲ [مسئلہ ۱۴]

نوٹ۔ یہ بعد ازاں معلوم ہوگا کہ خط مذکورہ ج ف د قطر ج د ہے جو ج ن کا مزدوج ہے

مسئلہ ۱۷

ل گ : ج ل = ج ب۲ : ج ا۲ اور ج گ = ر۲ × ج ل



گ ن کو اتنا خارج کرو کہ وہ مزدوج محور کو گ۱ پر ملے
تب ل گ : ج ل = ن گ : ن گ۱ [اقلیدس م ۶ ش ۲]
= ن گ × ن ف : ن گ۱ × ن ف
= ج ب۲ : ج ا۲ [مسئلہ ۱۶]
نیز چونکہ ل گ : ج ل = ج ب۲ : ج ا۲
∴ ج ل + ل گ : ج ل = ج ا۲ + ج ب۲ : ج ا۲
∴ ج گ : ج ل = ج س۲ : ج ا۲ [مسئلہ ۸]

$= ز^۲ : ۱$

$\therefore$ ج گ $= ز^۲ \times$ ج ل

مشقی مثالیں مسئلہ ۱۷

۱۔ ثابت کرو کہ ج گ × ج ل‚ : ج گ‚ × ج ل = ب ج^۲ : ا ج^۲

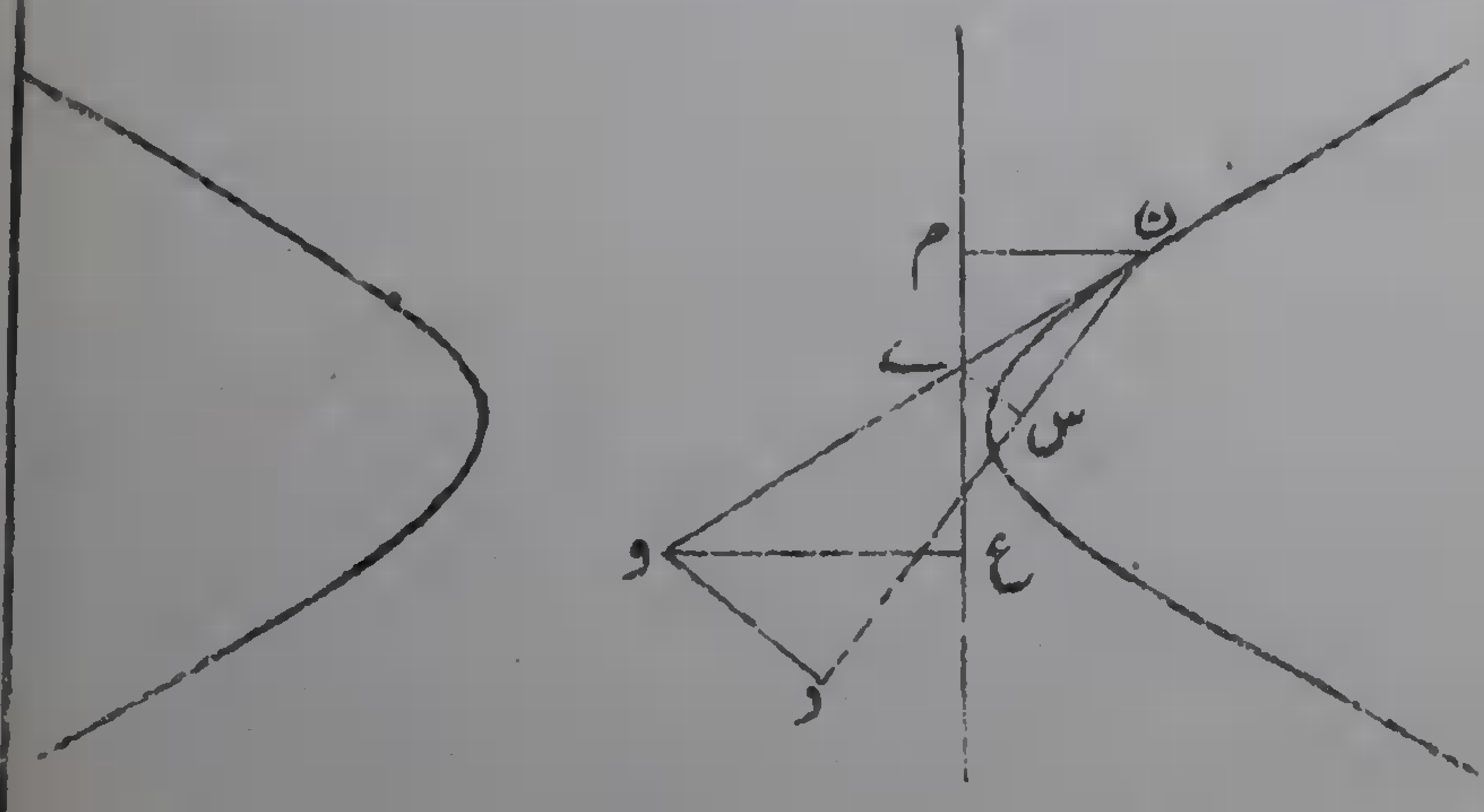
۲۔ قائم ہذلولی میں ثابت کرو (ا) ج ل = ل گ

(ب) ن گ = ن گ‚ = ج ن

مسئلہ ۱۸

اگر ہذلولی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس کھینچا جائے اور مماس پر کے ایک نقطہ و سے مرتب پر عمود و ع اور س ن پر عمود و ذ نکالے جائیں

تو ثابت کرو کہ س ذ = ر × و ع [اس خاصیت مہندس آدم سے منسوب کرتے ہیں]



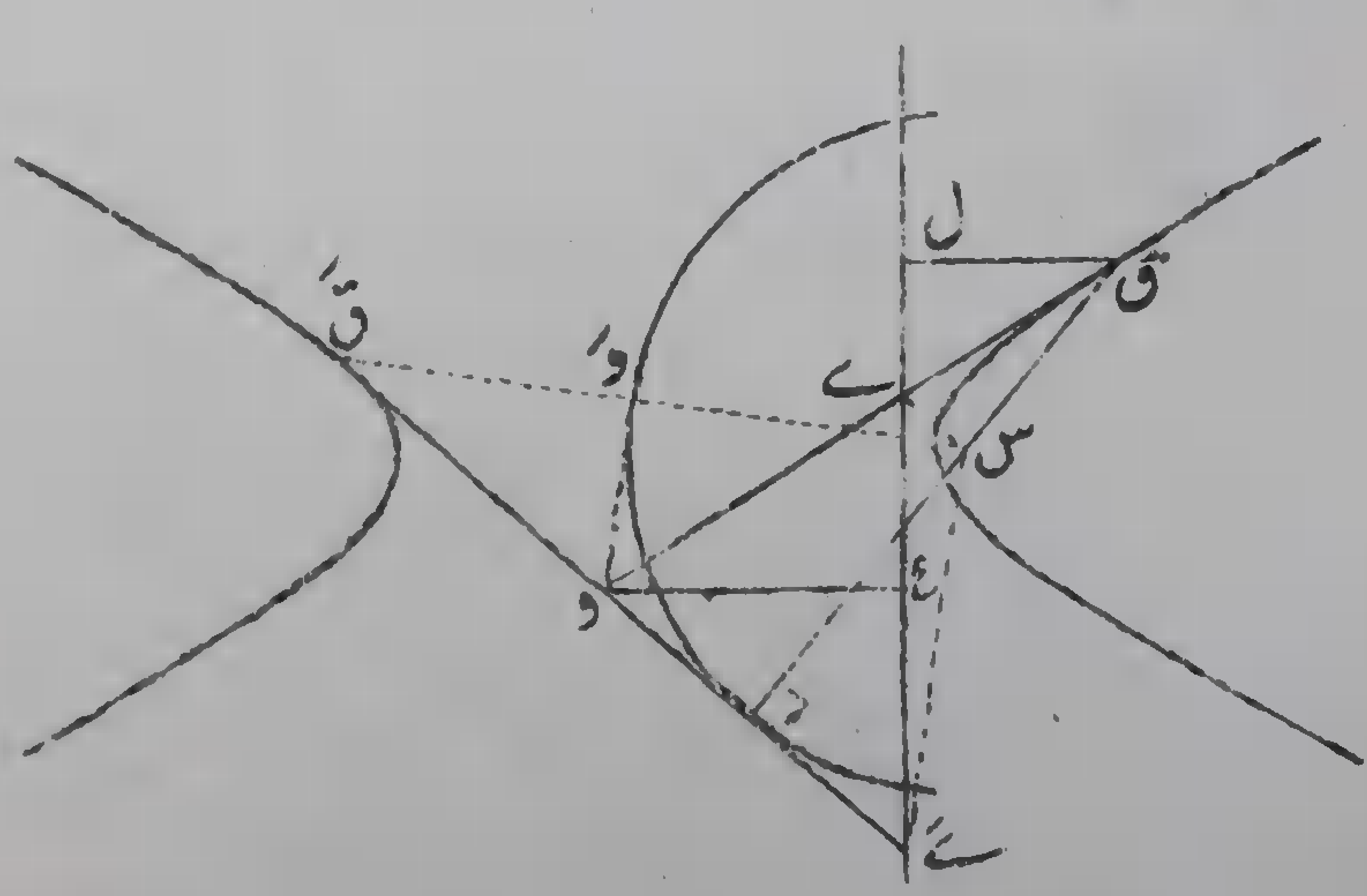
س ے کو ملاؤ اور مرتب پر عمود ن م نکالو،
تب چونکہ زاویہ ے س ن قائمہ ہے اسلئے ے س،
و د کے متوازی ہے۔

∴ س د : س ن = ے و : ے ن
= و ع : م ن
∴ س د : و ع = س ن : م ن
= ر : ۱
اسلئے س د = ر × و ع

اگر مماس پر کوئی نقطہ و ایسا ہو کہ اس میں سے گزرنے والا ایک خط و ق قَ قاطع محور پر عمود ہو اور منحنی کو ق اور قَ پر ملے تو ثابت کرو کہ س د = س ق اور و د² = و ق × و قَ، دیکھو ہلیلجی کا مسئلہ ۲۰ شکل ۲

مسئلہ ۱۹

ایک بیرونی نقطہ و سے ہذلولی کے دو مماس و ق اور و قَ کھینچو



مرتب پر عمود و ع نکالو، س کو مرکز اور ر × وع کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو اور نقطہ و سے اس دائرہ کے دو مماس ود اور ودَ کھینچو۔

س د پر عمود س سے قایم کرو جو مرتب کو سے پر ملے، سے و کو ملاؤ اور اس کو اتنا خارج کرو کہ یہ س د کو ق پر ملے، مرتب پر عمود ق ل نکالو۔

تب س ق : س د = ق سے : و سے

= ق ل : و ع

∴ س ق : ق ل = س د : و ع = ر : ۱

اس لئے نقطہ ق ہذلولی پر ہے۔

اور چونکہ ق س سے قائمہ ہے اس لئے و ق قطع زائد کے نقطہ ق پر کا مماس ہے۔ [مسئلہ ۱۰]

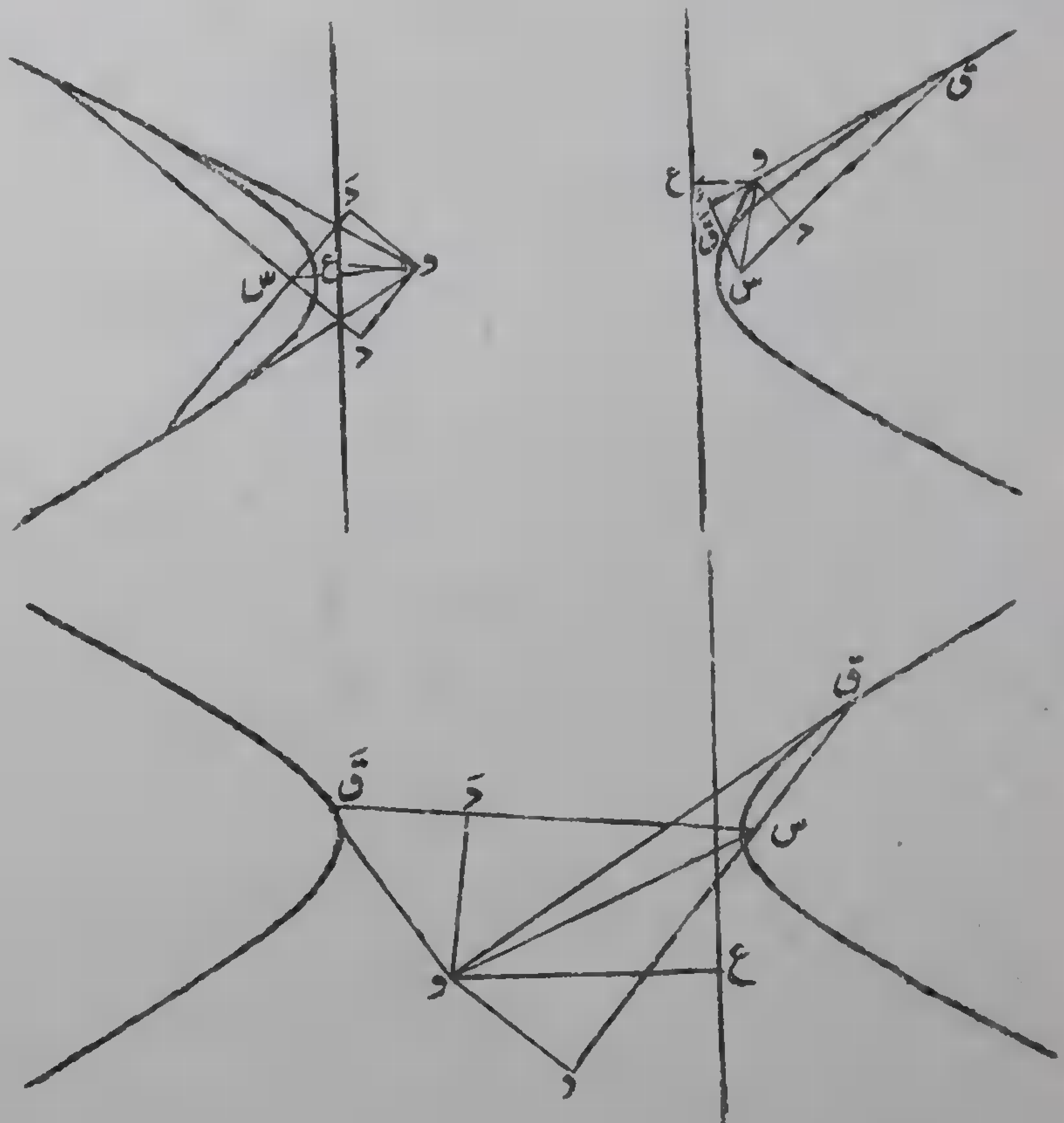
اسی طرح سے اگر ہم س دَ پر عمود س سےَ قائم کریں، و سےَ کو ملائیں اور اس کو اتنا خارج کریں کہ وہ س دَ کو قَ پر ملے تو و قَ دوسرا مماس ہوگا

نوٹ۔ اوپر کا عمل مسئلہ ۱۸ کی مدد سے حاصل ہوا لیکن مسائل ۱۲ اور ۱۳ کی بنا پر بھی مماس کھینچے جا سکتے ہیں۔

مسئلہ ۲۰

اگر نقطے ق اور قَ زائد کی ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو ثابت کرو کہ مماسات و ق، و قَ کے محاذی ماسکہ

پر مساوی زاویے وس ق، وس قَ بنتے ہیں لیکن
اگر یہ نقطے مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں تو اوپر کے
زاویوں میں سے ہر ایک زاویہ دوسرے کا تکملہ ہوگا۔



مرتب پر عمود وع نکالو
وس، س قَ، س قَ کو ملاؤ اور س ق، س قَ
پر عمود ود، ودَ کھینچو
تب س د = ر × وع = س دَ [مسئلہ ۱۸]
اسلئے مثلث وس د، وس دَ ہر طرح سے مساوی

ہیں۔ [اقلیدس م ا سش ۲۶]

اس لئے زاویہ وس د = زاویہ وس دَ

اسلئے شکل ا میں، زاویہ وس ق = زاویہ وس قَ اور شکل ۲ میں زوایا وس ق، وس قَ میں سے ہر ایک زاویہ دوسرے کا تکملہ ہے۔

نوٹ۔ اگر و مرتبوں کے درمیان واقع ہو تو شکل ا کی بائیں طرف کا حصہ استعمال کرو۔

مشقی مثالیں مسئلہ ۲۰

ا۔ اگر ایک زائد کے راسوں پر ماس کھینچے جائیں تو جو حصہ وہ کسی تیسرے ماس سے کاٹیں گے اس کے محاذی ہر ایک ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنے گا۔

۲۔ ثابت کرو کہ مثلث س ن سَ کے اندرونی دائرہ کے مرکز کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔

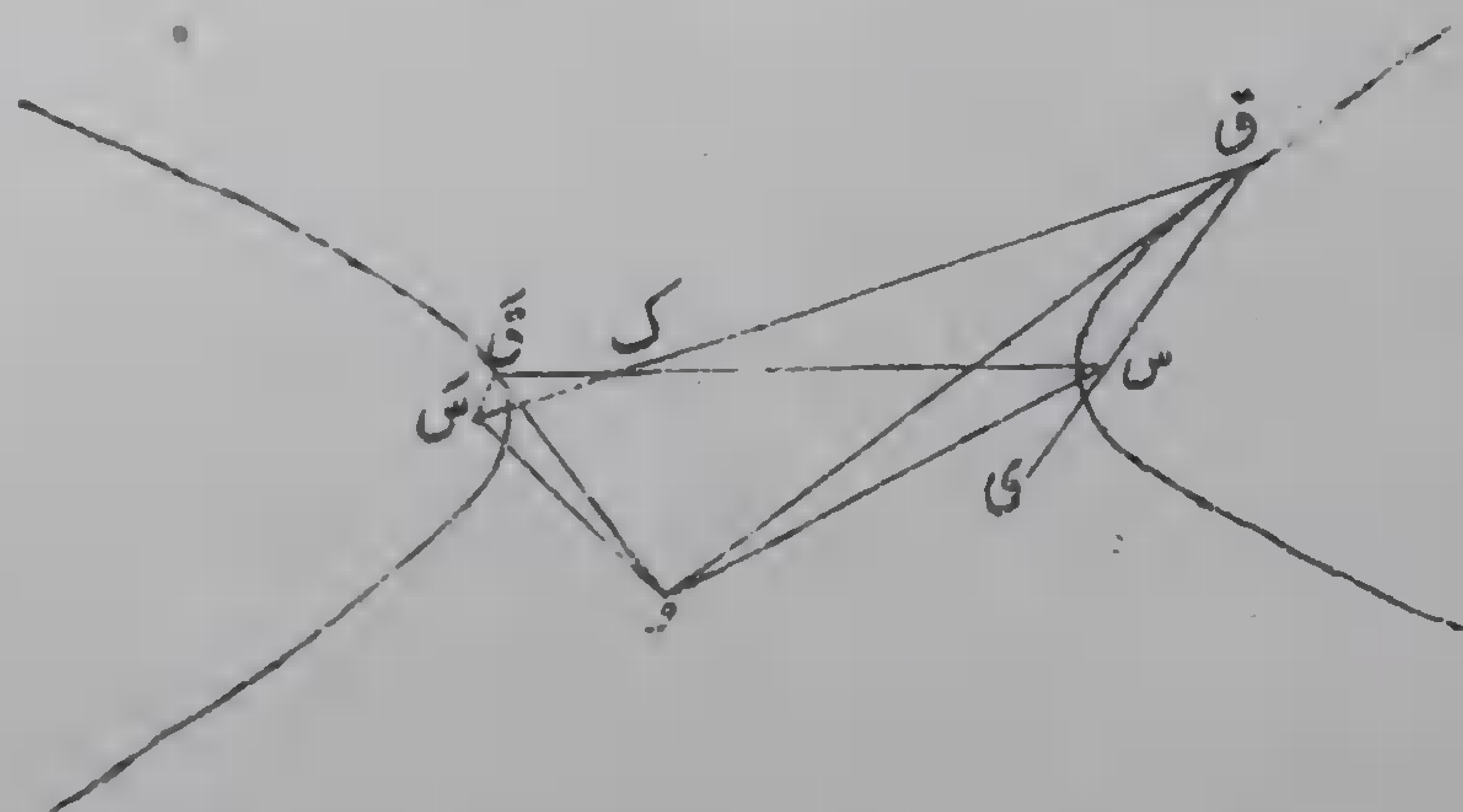
۳۔ ثابت کرو کہ خط س و اور مرتب دونوں ملکر وتر تماس ق قَ کو موسیقی نسبت میں تقسیم کرتے ہیں

مسئلہ ۲۱

ثابت کرو کہ وق اور وقَ خطوط وس اور وسَ کے ساتھ بالترتیب مساوی زاویئے بنائیں گے اگر ق اور قَ مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں لیکن

اگر ق اور قَ ایک ہی شاخ پر واقع ہوں تو خطوط مذکورہ بالترتیب ایک دوسرے سے ایسے زاویے بنائیں گے جن میں سے ہرایک دوسرے کا تکملہ ہوگا

صورت اوّل۔ س ق، س قَ، سَ ق، سَ قَ کو ملاؤ اور ق س کو ی تک خارج کرو اور فرض کرو کہ س قَ، سَ ق کو ک پر ملتا ہے۔



تب زاویہ س و ق = ∠ و س ی - ∠ و ق س

[اقلیدس م ا ش ۳۲]

= $\frac{1}{2}$ ∠ قَ س ی - $\frac{1}{2}$ ∠ سَ ق س

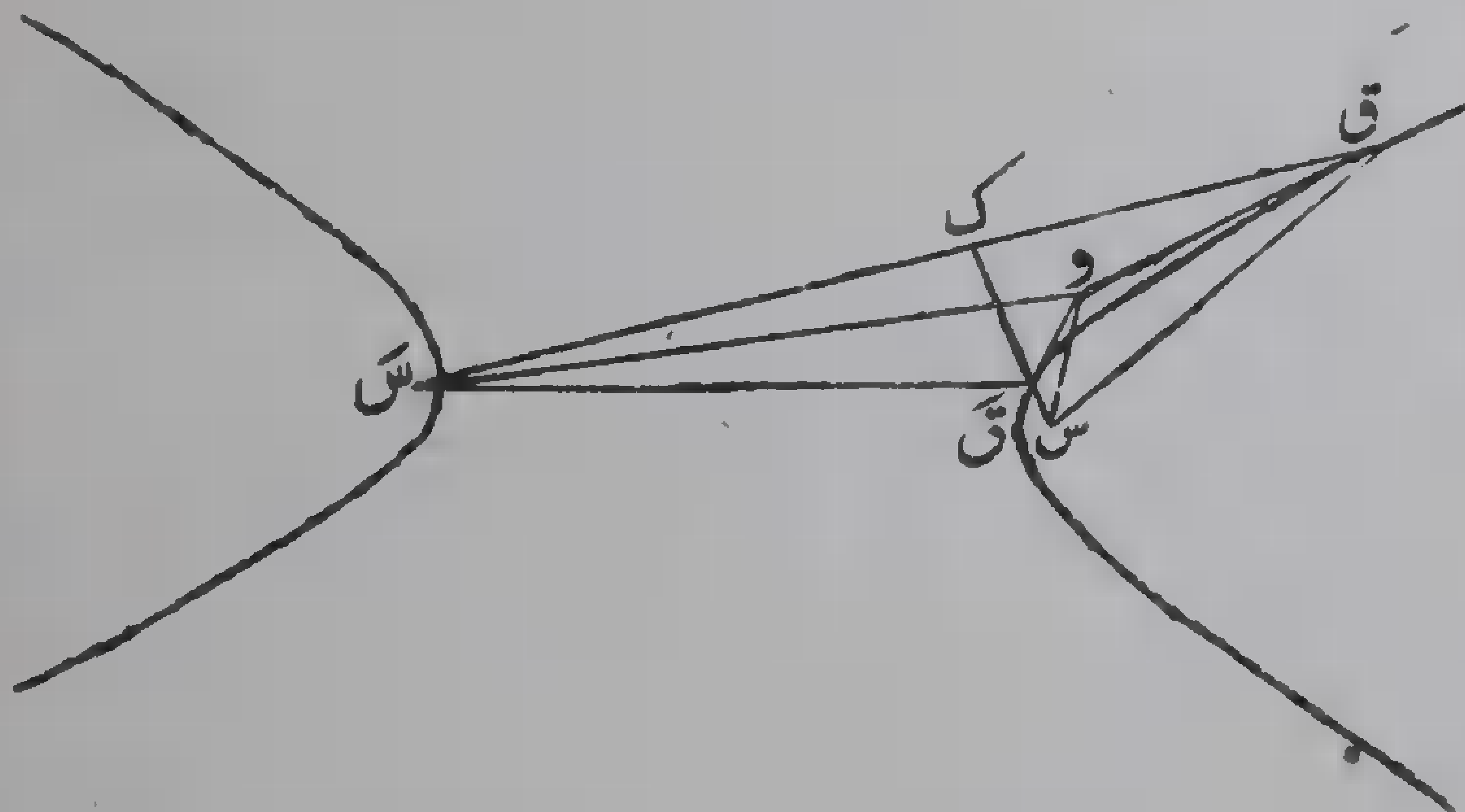
[مسائل ۲۰ اور ۱۲]

= $\frac{1}{2}$ ∠ س ک ق [اقلیدس م ا شکل ۳۲]

اسی طرح سے ∠ سَ و قَ = $\frac{1}{2}$ ∠ سَ ک قَ

∴ ∠ س و ق = $\frac{1}{2}$ جہ سَ و قَ

صورت دوم



∠ س و ق = ۱۸۰° - ∠ و س ق - ∠ و ق س [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

= ۱۸۰° - ½ ∠ ق س قَ - ½ ∠ س ق سَ

[مسائل ۲۰ اور ۱۲]

= ۱۸۰° - ½ ∠ س ک سَ [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

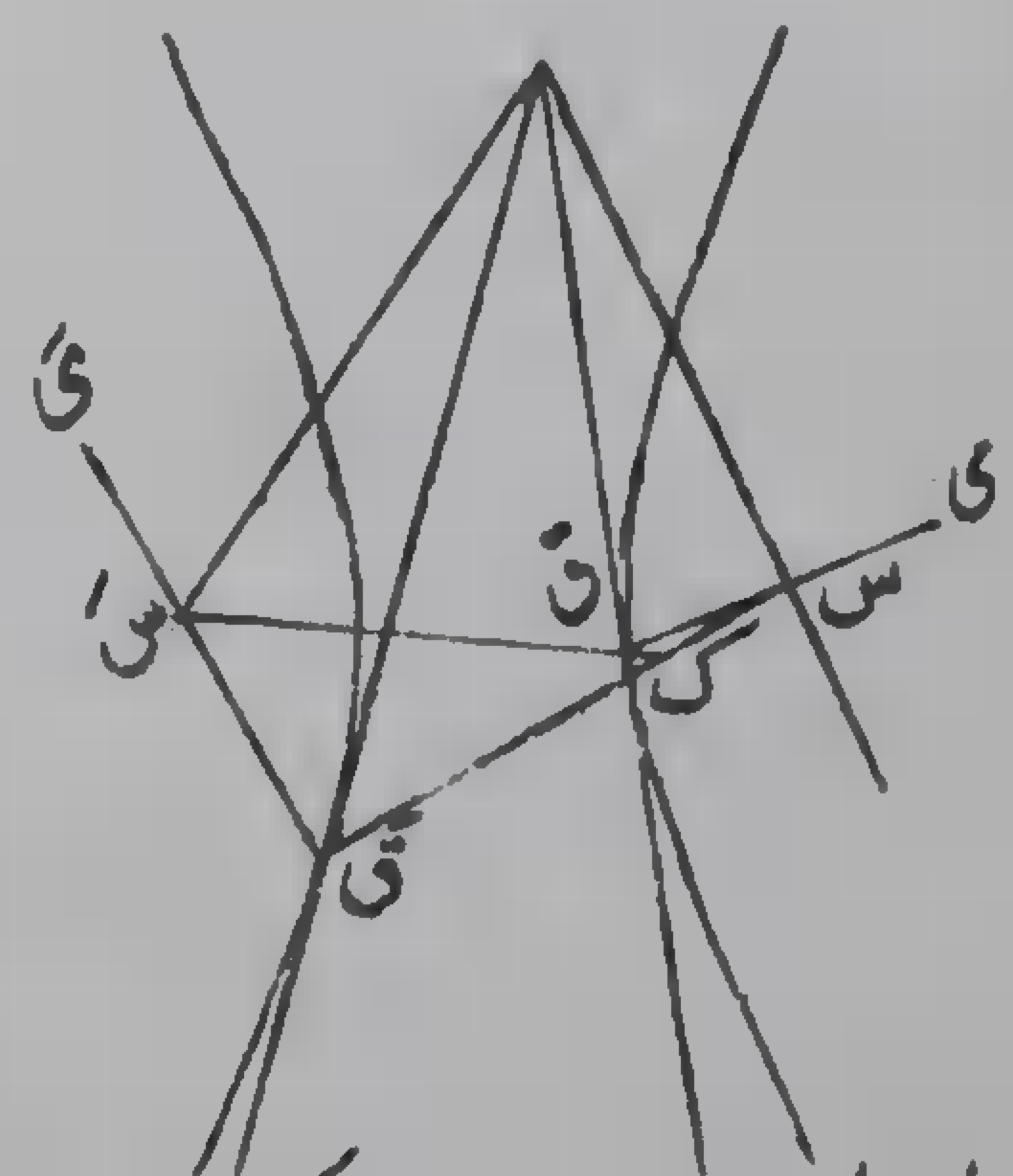
نیز ∠ سَ و قَ = ۱۸۰° - و قَ سَ - و سَ قَ [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

= ½ ∠ س قَ سَ - ½ ∠ ق سَ قَ [مسائل ۱۲، ۲۰]

= ½ ∠ س ک سَ [اقلیدس م ۱ ش ۳۲]

∴ س و ق = ۱۸۰° - سَ و قَ

صورت دوم میں نقطہ و اُن دو زاویوں میں سے ایک کے اندر واقع ہے جو متقاربوں کے باہمی تقاطع سے بنتے ہیں اور جن کے اندر قطع زائد کی شاخیں واقع ہیں۔ صورت



اول میں نقطہ و باقی دو زاویوں میں سے کسی کے اندر واقع ہے۔
نیز ثبوت کی نوعیت کچھ اس امر پر بھی مبنی ہے کہ آیا نقطہ و مرتبوں کے درمیان واقع ہے یا ان کے باہر۔ صورت اوّل مندرجہ بالا میں نقطہ و مرتبوں کے درمیان واقع ہے، شکل بالا میں یہ ان کے باہر ہے اور اس لئے ک، سَ قَ ممدودہ پر واقع ہے۔

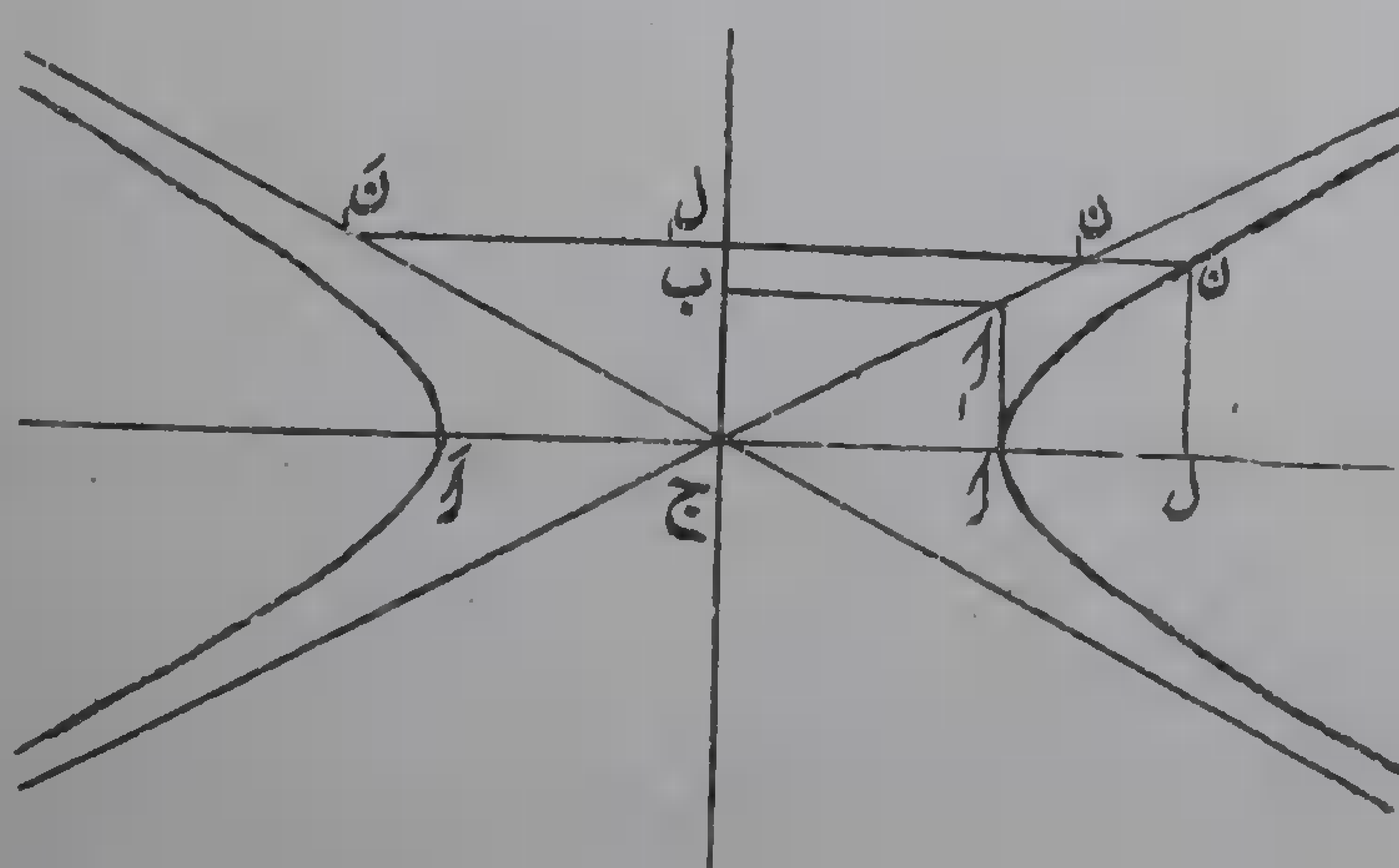
نیز نقطہ و کے دو مقام جو مسئلہ ۲۰ کی شکل ۱ میں دئے ہیں ان سے صورت دوم مذکورۂ بالا کی دو مقابل کی صورتیں حاصل ہونگی۔

تعریف۔ جس قطع زائد کے قاطع اور مزدوج محور بالترتیب ج ب اور ج ا ہوں اس کو مزدوج قطع زائد کہتے ہیں۔

نوٹ - مزدوج ہذلولی کے وہی متقارب ہوتے ہیں جو اصلی ہذلولی کے ہوں اور اس کی وجہ یہ ہے کہ دونوں صورتوں میں وہ ایک ہی مستطیل کے قطر ہیں -

مسئلہ ۲۲

اگر منحنی پر کوئی نقطہ ن لیا جائے اور اس نقطہ میں سے ج ا یا ج ب کے متوازی ایک خط کھینچا جائے جو متقاربوں کو ن، نَ پر ملے تو ثابت کرو کہ سطح ن ن × ن نَ = بالترتیب ج ا یا ج ب کے مربع کے اگر ن مزدوج قطع زائد پر ہو تو بھی اسی قسم کا ربط درست ہوگا -



صورت اوّل - ن ن نَ کو ج ا کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ ج ب کو ل پر ملتا ہے

تب ن ل^2 : ج ل^2 - ج ا^2 = ج ب^2 : ج ا^2 [مسئلہ ۳]

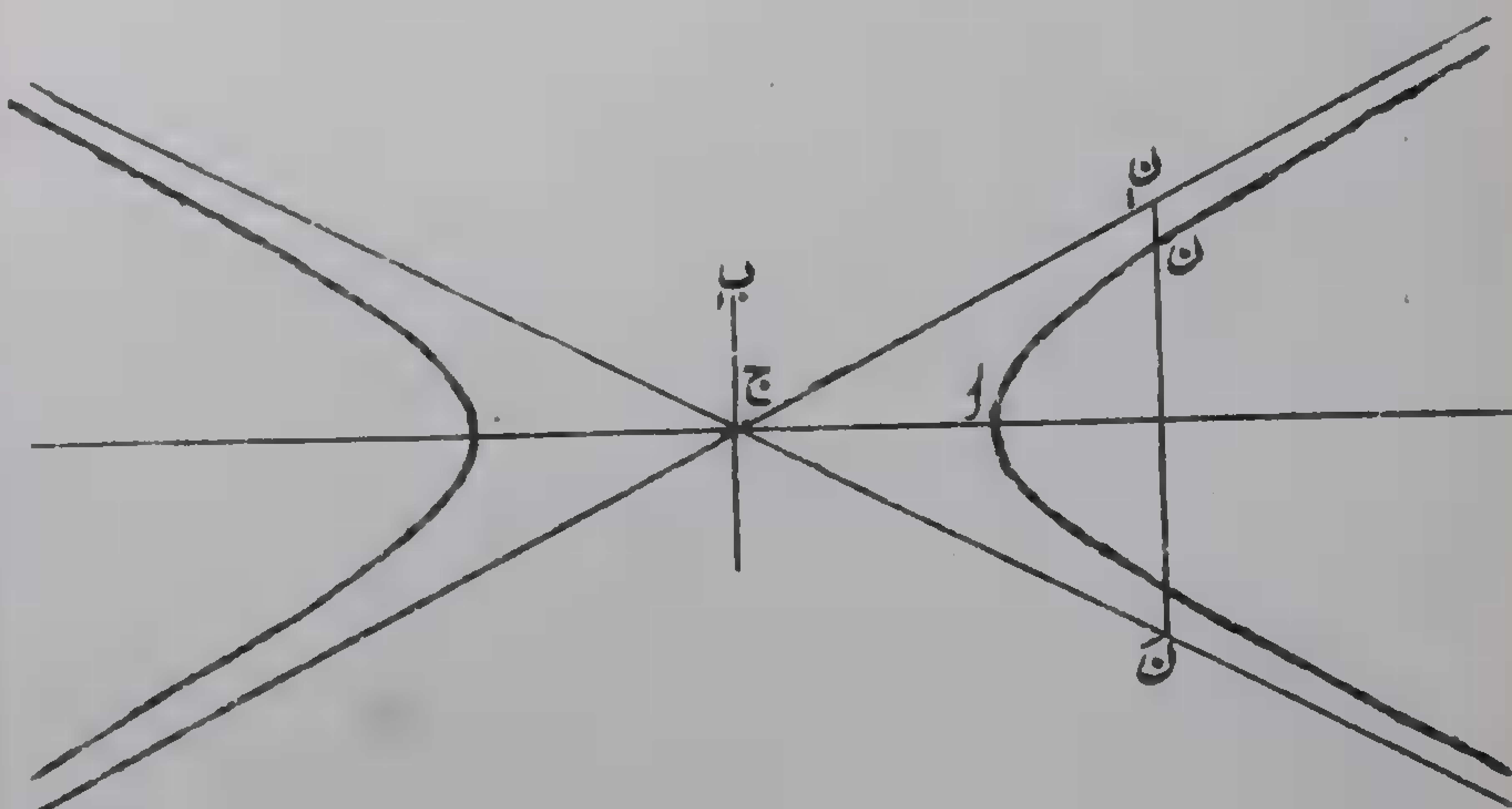
∴ ج ل$_1^2$: ن ل$_1^2$ − ج ا^2 = ج ب^2 : ج ا^2

نیز ج ل$_1^2$: ن$_1$ ل$_1^2$ = ج ب^2 : ب ا$_1^2$ = ج ب^2 : ج ا^2

∴ ن ل$_1^2$ − ج ا^2 = ن$_1$ ل$_1^2$

∴ ن ل$_1^2$ − ن$_1$ ل$_1^2$ = ج ا^2

یا ن ن$_1$ × ن ن$'_1$ = ج ا^2



صورت دوم ن ن$_1$ ن$'$ کو ج ب کے متوازی کھینچو

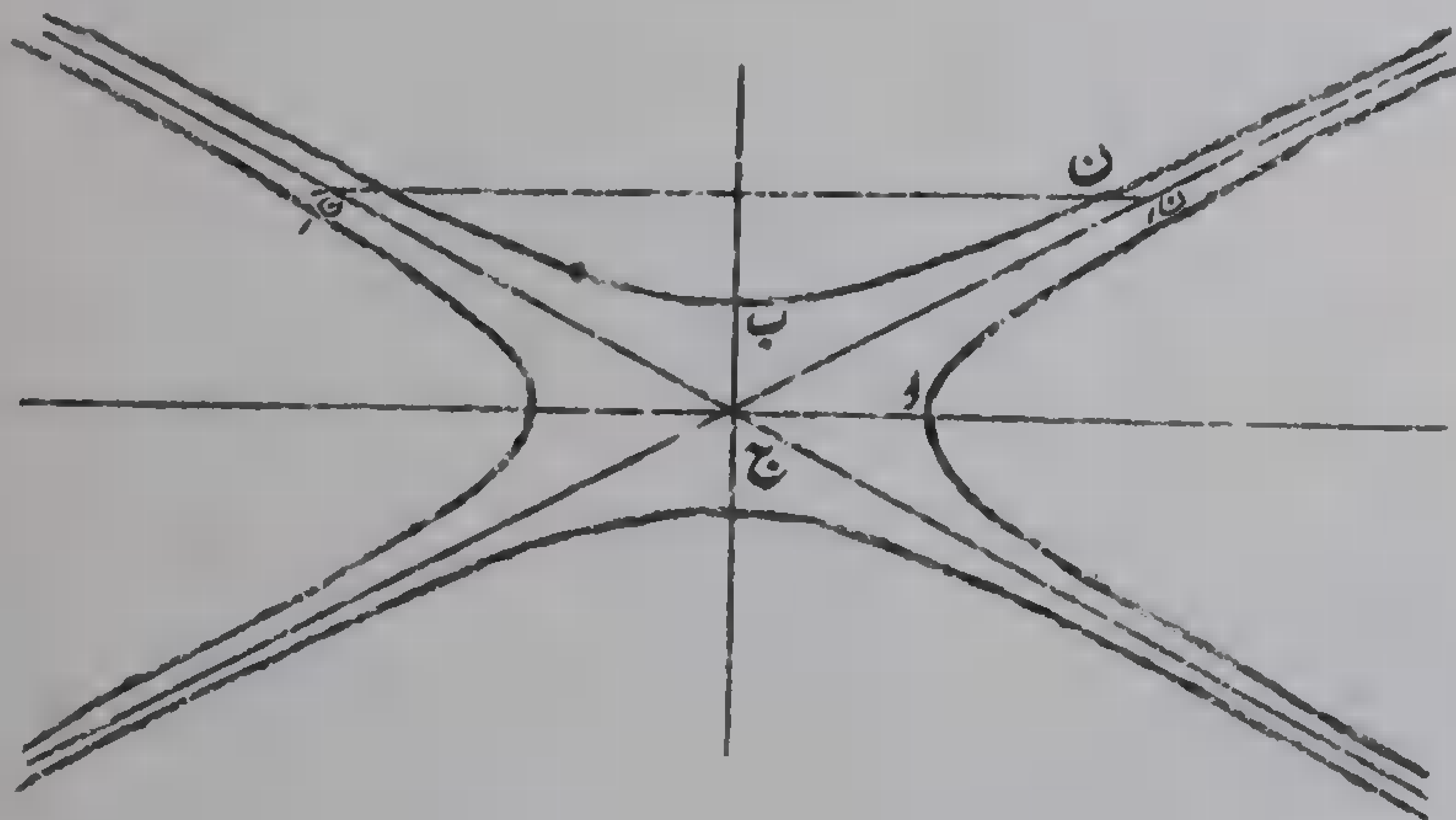
تب ن ن$_1$ × ن ن$'_1$ = ج ب^2 [مسئلہ ۴]

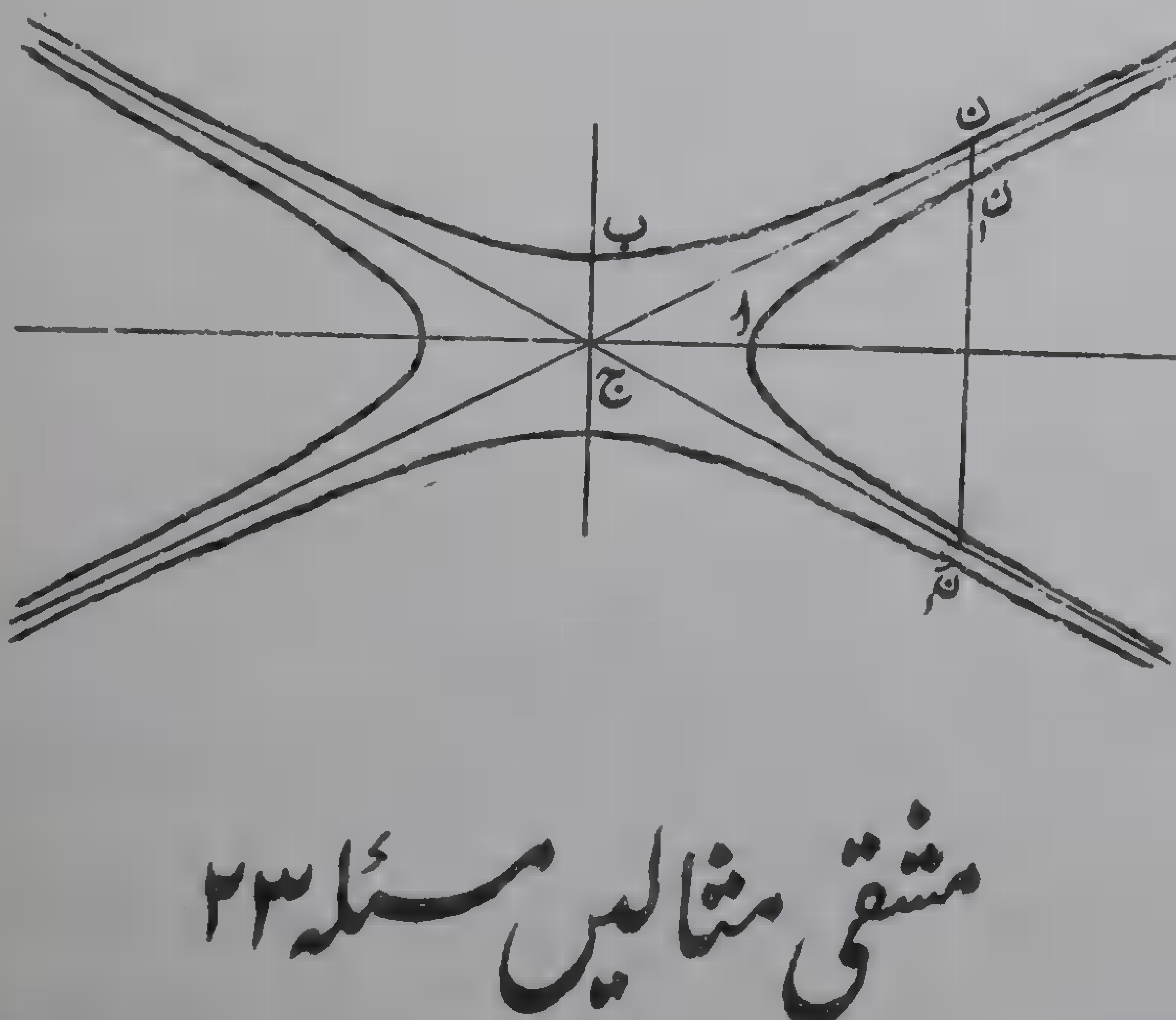
صورت سوم و چہارم چونکہ یہ بات زائد کے دونوں محاوروں کے لئے ثابت ہو چکی ہے کہ

ن ن$_1$ × ن ن$'_1$ = ج ا^2 یا ج ب^2 بالترتیب

اس لئے یہ اُس صورت میں بھی درست ہوگی

اگر ن مزدوج قطع زائد پر واقع ہو، ملاحظہ ہوں اشکال ذیل





مشقی مثالیں مسئلہ ۲۳

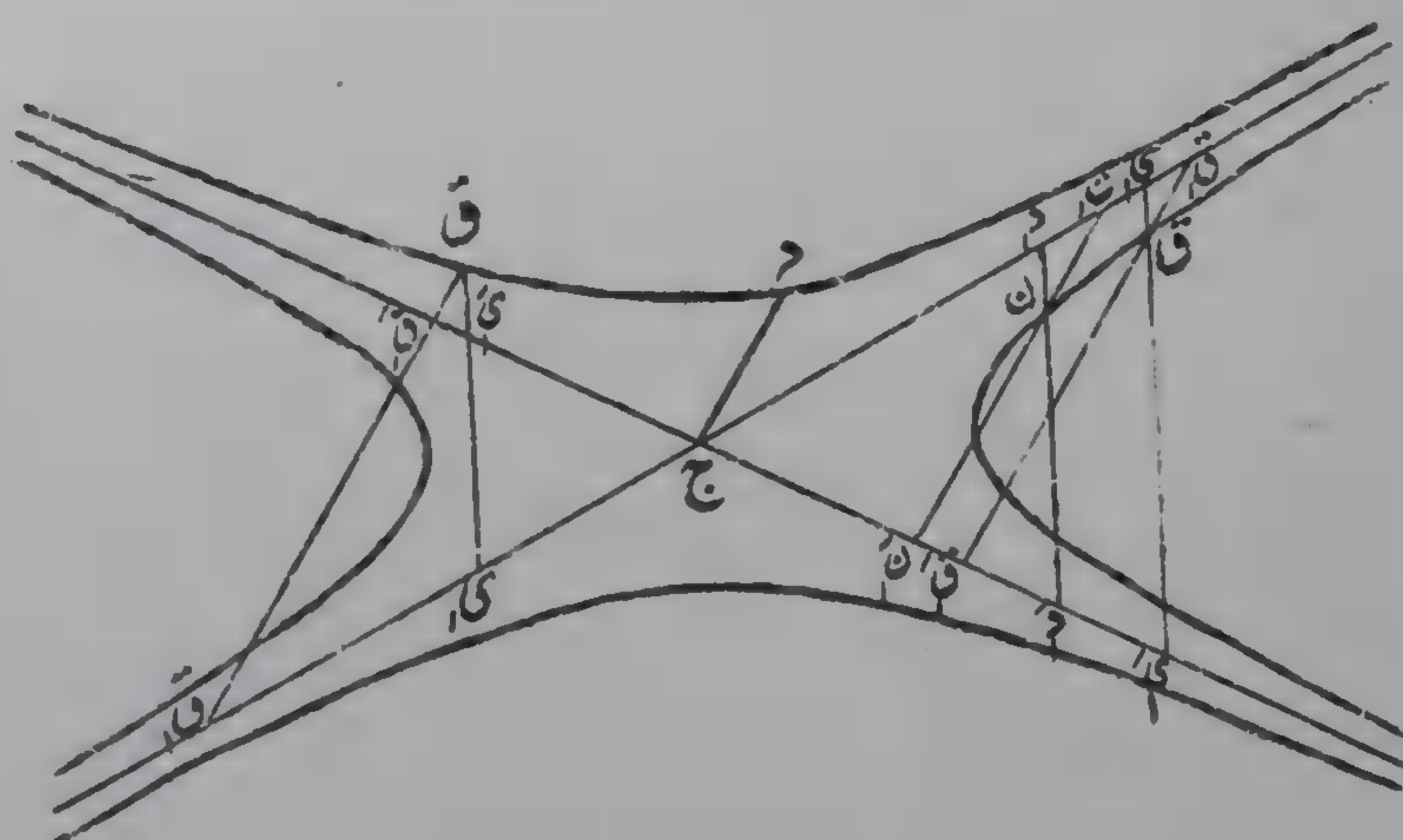
ق قَ، زائد کا ایک وتر ہے جو ن پر کے ۲س کے متوازی ہے، ن ن۱، ق ق۱، قَ قَ۱ ایک متقارب کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور دوسرے متقارب پر جاکر ختم ہوتے ہیں۔

ثابت کرو کہ ج ق۱ × ج قَ۱ = ج ن۱²

مسئلہ ۲۳

اگر منحنی یا اس کے مزدوج پر کے دو نقطوں ن اور ق میں سے دو متوازی اور مستقیم خط کھینچے جائیں جو متقاربوں کو بالترتیب ن، نَ اور ق، قَ پر ملیں تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب (سطح)

ن ن × ن نَ = ق ق × ق قَ



سب سے پہلے فرض کرو کہ ن اور ق قطع زائد کی ایک ہی شاخ پر واقع ہیں۔

ن اور ق میں سے مزدوج محور ج ب کے متوازی خط کھینچو جو متقاربوں کو د، دَ اور ی، یَ پر ملیں۔

متشابہ مثلثوں سے

ن ت١ : ن د١ = ق قَ١ : ق ی١

اور ن نَ١ : ن دَ١ = ق قَ١ : ق یَ١

اس لئے ضرب دینے سے

ن ن١ × ن نَ١ : ن د١ × ن دَ١ = ق ق١ × ق قَ١ : ق ی١ × ق یَ١

لیکن ن د١ × ن دَ١ = ج بَ٢ = ق ی١ × ق یَ١ [مسئلہ ۲۲]

ن ن١ × ن نَ١ = ق ق١ × ق قَ١

اگر ق، زائد یا اس کے مزدوج پر واقع ہو تو یہی اسی قسم کا استدلال صادق آئے گا، دونوں صورتیں شکل میں دکھائی گئی ہیں

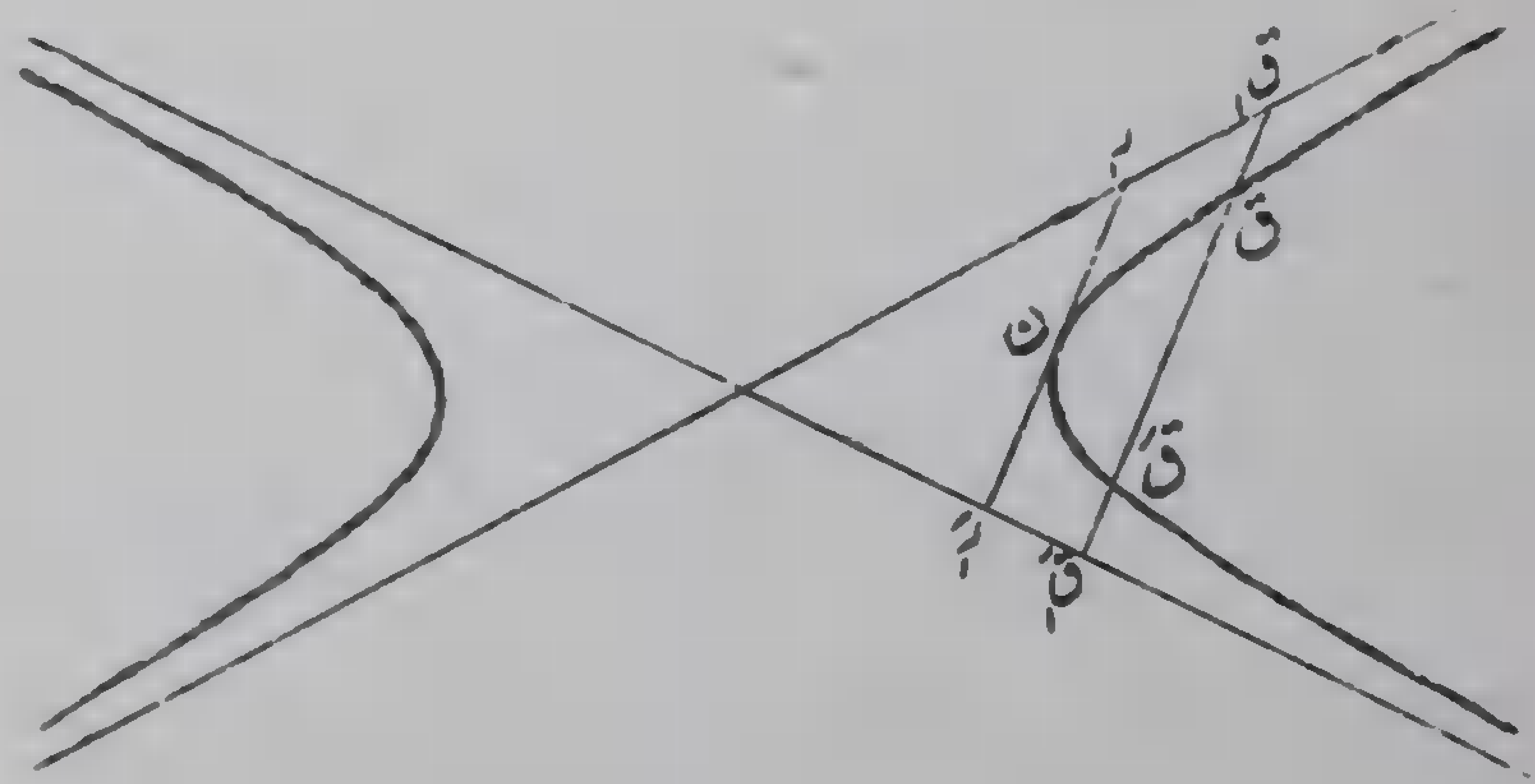
نوٹ ۔ مرکز میں سے ج د کو ق ق١ یا ن ن١ کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ منحنی یا اس کے مزدوج کو د پر ملتا ہے تب نقاط د اور ق کے لئے یہ مسئلہ ہو جائے گا۔

ق ق١ × ق قَ١ = د ج × د ج = ج د٢

مسئلہ ۲۴

اگر ایک مستقیم خط منحنی کو ق اور قَ پر اور متقاربوں کو ق١، قَ١ پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ق ق١ = قَ قَ١ اور اگر مماس ر رَ متقاربوں کو ر اور رَ پر ملے تو

ن ر = ن رَ



قَ ق۱ × ق قَ = قَ قَ۱ × قَ ق۱ [مسئلہ ۲۳]

∴ قَ ق۱ × ق قَ + ق ق۱ × قَ قَ۱ = قَ قَ۱ × ق قَ + قَ قَ۱ × ق ق۱

∴ ق ق۱ × ق قَ = قَ ق۱ × قَ ق

∴ ق ق۱ = قَ قَ۱

فرض کرو کہ ق قَ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وہ ہمیشہ اپنے متوازی رہے اور آخرالامر نقطہ ن پر پہنچتا ہے جہاں وہ منحنی کا مماس بنجاتا ہے۔

چونکہ ہمیشہ ق ق۱ = قَ قَ۱

اس لئے ن ب = ن بَ

نوٹ۔ اگر ق ، قَ ہذلولی کی مقابل کی شاخوں پر واقع ہوں تو اس صورت میں ق قَ کے متوازی منحنی کا کوئی مماس نہ ہوگا۔

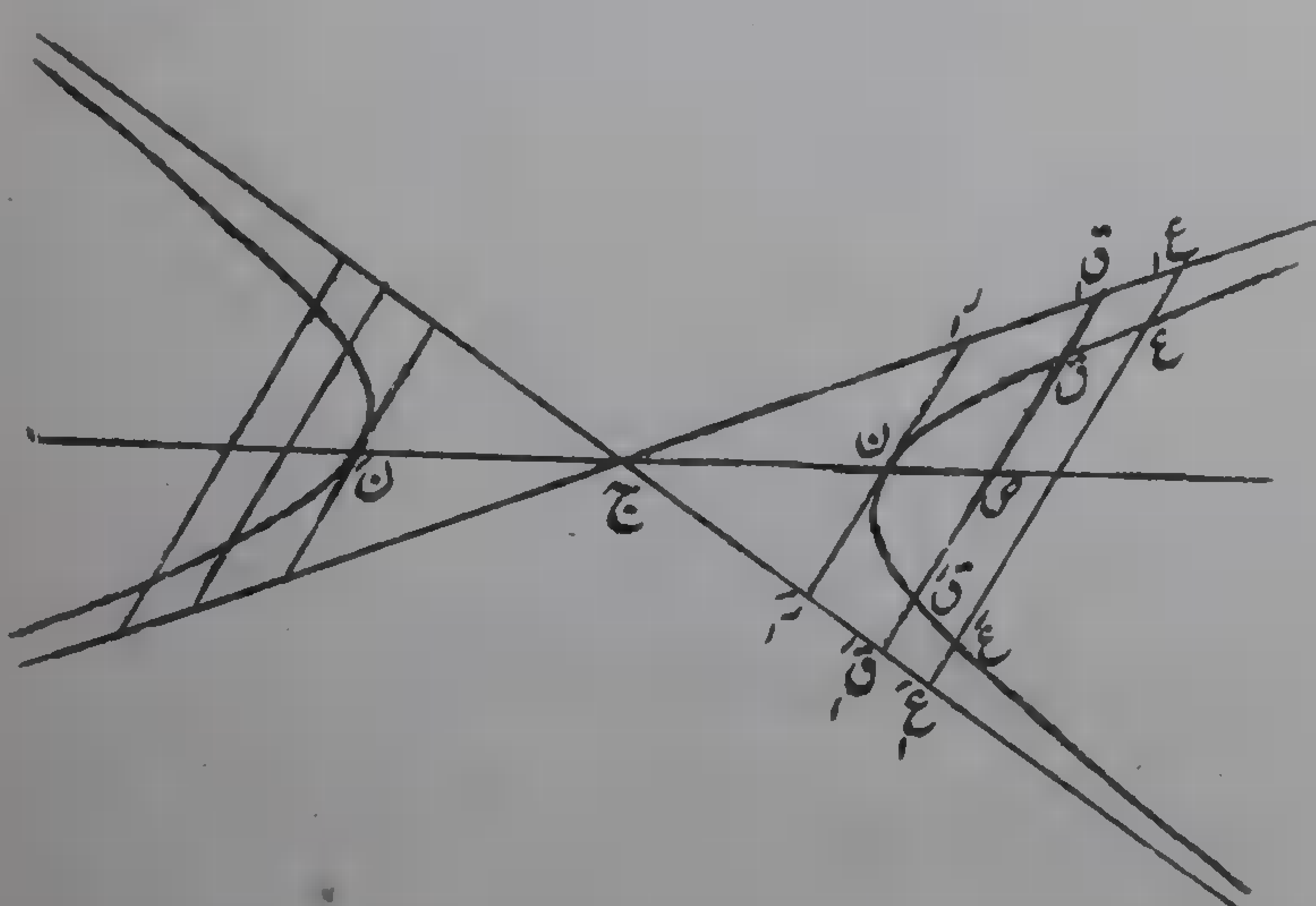
مشقی مثالیں مسئلہ ۲۴

۱۔ اگر ق، قَ$_1$ مزدوج ہذلولی پر واقع ہوں تو بھی ق قَ$_1$ = قَ ق$_1$

۲۔ اگر ن پر کا عماد محوروں کو گ، گ$_1$ پر ملے تو ثابت کرو کہ نقاط گ، گ$_1$، ہ، ہ$_1$ ایک ایسے دائرہ پر واقع ہیں جو مرکز میں سے گزرتا ہے

مسئلہ ۲۵

ہذلولی کے متوازی وتروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے ثابت کرو کہ وتروں کے وسطی نقاط کا طریق ایک ایسا مستقیم خط ہے جو مرکز میں سے گزرتا ہے۔
نیز ثابت کرو کہ اگر مستقیم خط کے کسی ایک سرے پر مماس کھینچا جائے تو وہ وتروں کے متوازی ہوگا



فرض کرو کہ ق قَ، ع عَ، وغیرہ متوازی وتروں کا نظام ہے متقاربوں کو ق، قَ، ع، عَ، وغیرہ پر ملتا ہے۔
ج ص کو اس طرح کھینچو کہ وہ ق قَ کی تنصیف ص پر کرے
تب ج ص، ق، قَ کی بھی تنصیف کرتا ہے کیونکہ ق ق، = قَ قَ،
[مسئلہ ۲۴]
اسلئے متشابہ مثلثوں کے ذریعہ یہ ثابت ہوتا ہے کہ ج ص، ع عَ کی تنصیف کرتا ہے۔
اسلئے یہ ع عَ کی تنصیف کرتا ہے کیونکہ ع ع، = عَ عَ،
[مسئلہ ۲۴]
اسلئے ج ص اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ق قَ کے متوازی ہیں۔
فرض کرو کہ ج ص منحنی کو نقطہ ن پر ملتا ہے اور فرض کرو کہ ق قَ، ن کیطرف حرکت کرتا ہے اور ہمیشہ اپنے متوازی رہتا ہے۔
تب چونکہ ج ن ص ہمیشہ ق قَ کی تنصیف کرتا ہے اسلئے ق اور قَ آخرالامر نقطہ ن پر منطبق ہوتے ہیں اسلئے ن پر کا مماس متوازی وتروں کے اُس نظام کے متوازی ہے جن کا منصف ج ن ص ہے۔
تعریف اگر ایک مستقیم خط (ج ن) متوازی وتروں کے ایک نظام کے وسطی نقاط میں سے گزرے تو

اسکو ہذلولی کا قطر کہتے ہیں

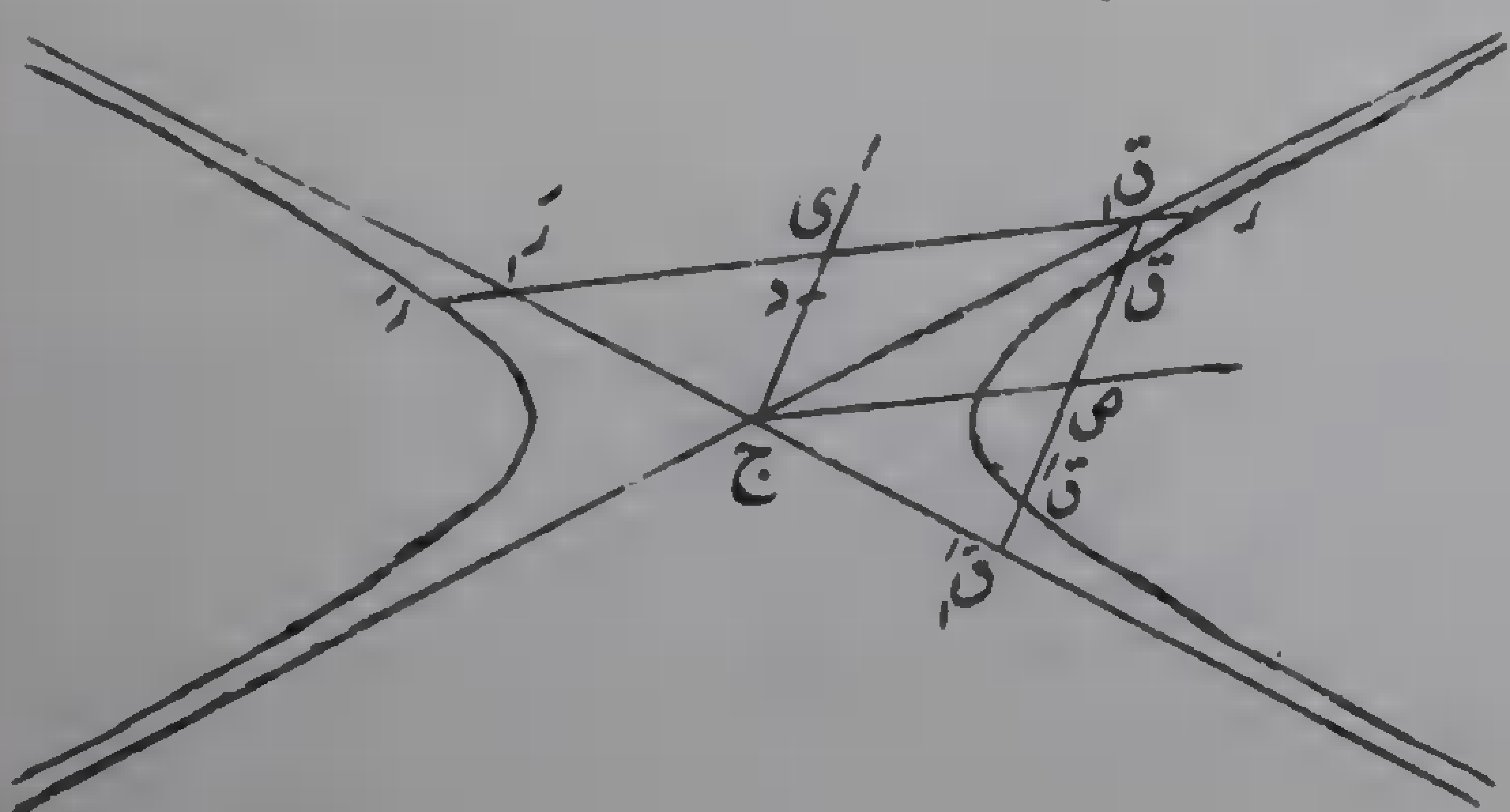
تعریف۔ اگر قطر (ن ج نَ) کے ایک سرے پر مماس کھینچا جائے اور منحنی کے کسی ایک نقطہ سے ایک مستقیم خط (ق ص) مماس کے متوازی کھینچا جائے تو اس خط کو قطر کا معین کہتے ہیں

انتباہ اگر قطر مذکور ناقص کا قاطع محور ہو تو معین کے وہی معنی ہونگے جو عام طور پر سمجھے جائیں۔

نوٹ قطر کے اُس حصہ کے طول کو جو ہذلولی یا اُس کے مزدوج کی شاخوں کے درمیان ہو بعض اوقات قطر کہتے ہیں

مسئلہ ۲۶

اگر ایک قطر اُن سب وتروں کی تنصیف کرے جو ایک دوسرے قطر کے متوازی ہوں تو دوسرا قطر ان سب

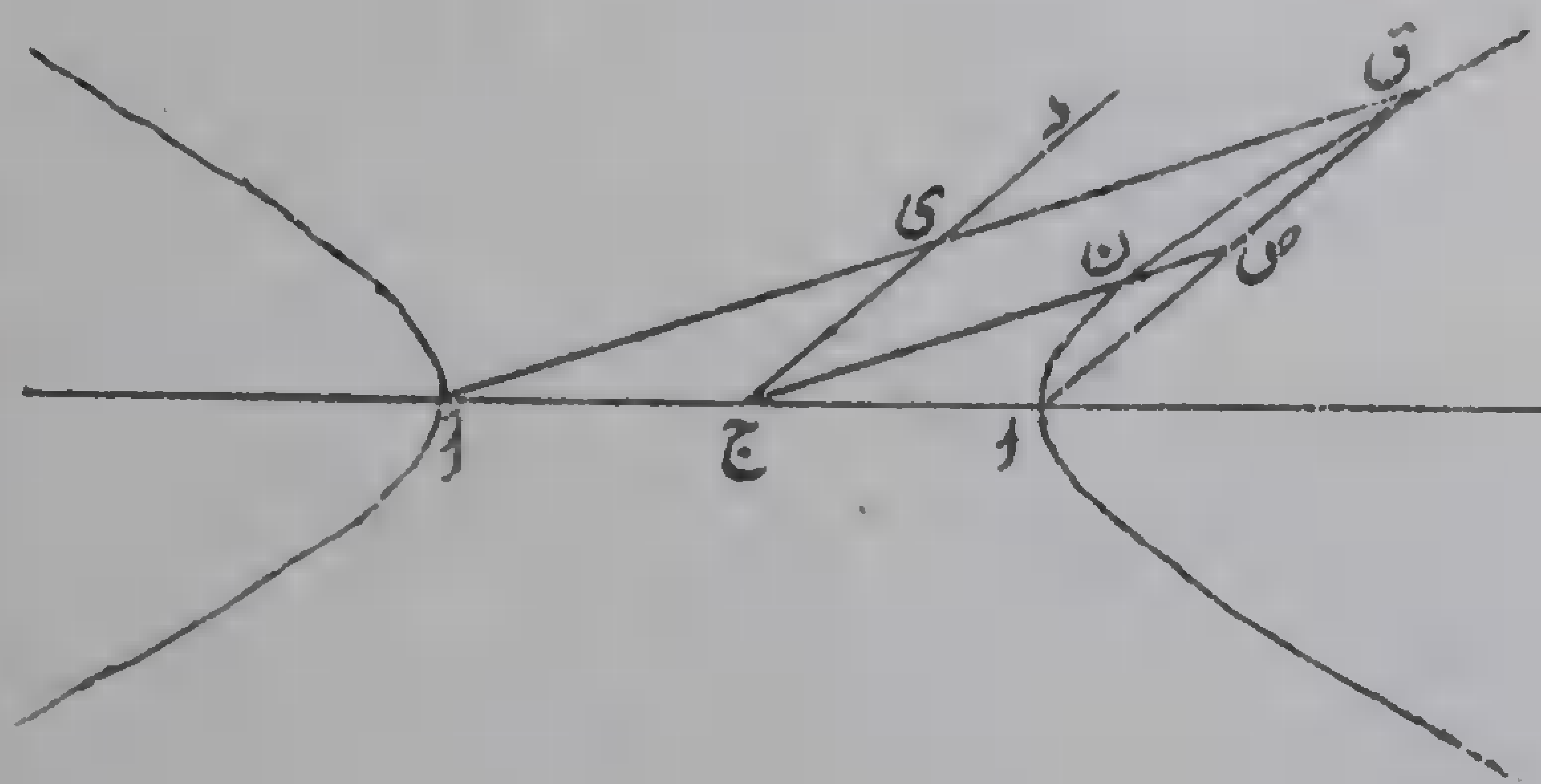


وتروں کی تنصیف کرے گا جو پہلے کے متوازی ہوں۔
فرض کرو کہ ج ن، ق قَ کی تنصیف ص پر کرتا ہے
ج د کو ق قَ کے متوازی کھینچو۔
ق قَ کو اتنا خارج کرو کہ وہ متقاربوں کو ق۱، قَ۱ پر ملے۔
قَ۱ میں سے ج ن کے متوازی ایک خط ر ق۱ ی رَ رَ کھینچو جو منحنی کو ر اور رَ پر، اور متقاربوں کو ق۱، رَ پر اور ج د کو ی پر قطع کرے۔
تب چونکہ ق ق۱ = قَ قَ۱
اسلئے ق۱ قَ۱ کی تنصیف ص پر ہوتی ہے، اور ج ص، ق۱ رَ کے متوازی ہے۔
∴ ج رَ = ج قَ۱ [اقلیدس م ۶ شکل ۲]
∴ رَ ی = ی ق۱ [اقلیدس م ۶ شکل ۲]
اور ر ق۱، رَ رَ کے مساوی ہے
∴ رَ ی = ر ی [مسئلہ ۲۴]
اس سے ثابت ہوا کہ ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج ن کے متوازی ہوں۔

مسئلہ ۲۶ (متبادل ثبوت)

اگر ایک قطر ایک دوسرے قطر کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی وتروں

کی تنصیف کرے گا۔



اق کو ج د کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ج ن
کو ص پر ملتا ہے۔
اَق کو ملاؤ فرض کرو۔ کہ یہ خط ج د کو ی پر قطع کرتا ہے
چونکہ اق کی تنصیف ص پر اور ااَ کی ج پر ہوتی ہے
اسلئے اَق، ج ن کے متوازی ہے اور چونکہ ج د،
اق کے متوازی ہے اسلئے اَق کی تنصیف ی پر
ہوتی ہے۔
اس لئے ج د ایک ایسے وتر اَق کی تنصیف کرتا ہے
جو ج ن کے متوازی ہے
اسلئے ج د اُن سب وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو
ج ن کے متوازی ہیں۔
تعریف اگر دو قطروں کا باہمی تعلق ایسا ہو کہ ان میں

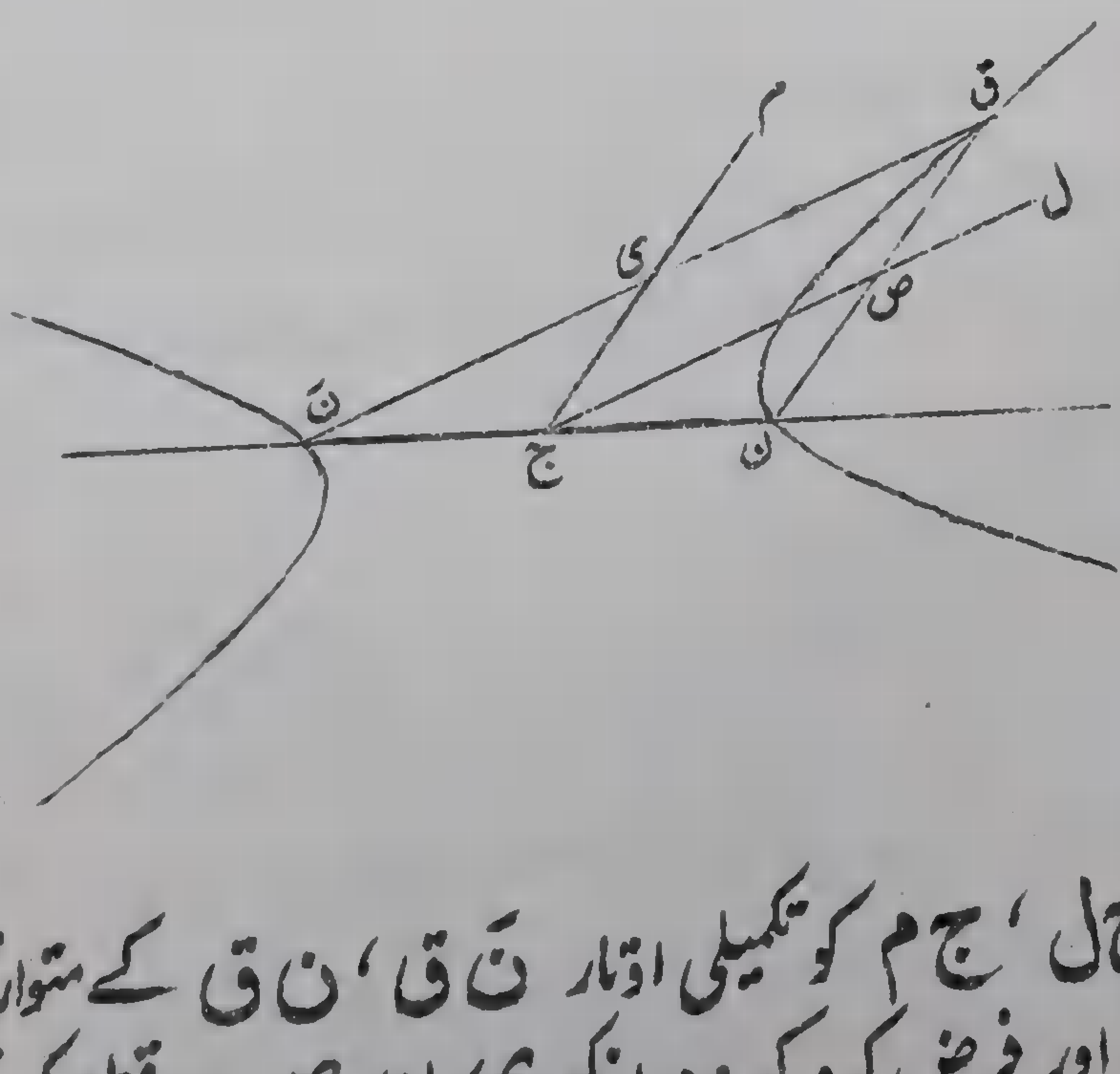
سے ہر ایک دوسرے کے متوازی وتروں کی تنصیف کرے تو انکو مزدوج قطر کہتے ہیں

نوٹ اگر دو قطر ایک دوسرے کے مزدوج ہوں تو ان میں سے ایک قطع زائد کو ملیگا اور دوسرا مزدوج قطع زائد کو

تعریف جو وتر (ق نَ، ق ن) قطع زائد کے کسی نقطہ ق کو ایک قطر (ن ج نَ) کے سروں سے ملائیں ان کو تکمیلی وتر کہتے ہیں

مسئلہ ۲۷

تکمیلی وتر مزدوج قطروں کے متوازی ہوتے ہیں



قطر ج ل، ج م کو تکمیلی اوتار نَ ق، ن ق کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ انکو ی اور ص پر قطع کرتے

ہیں تب ن ص : ص قَ = ن ج : ج نَ [اقلیدس م ۶ ش ۲]

∴ ن ص = ص قَ

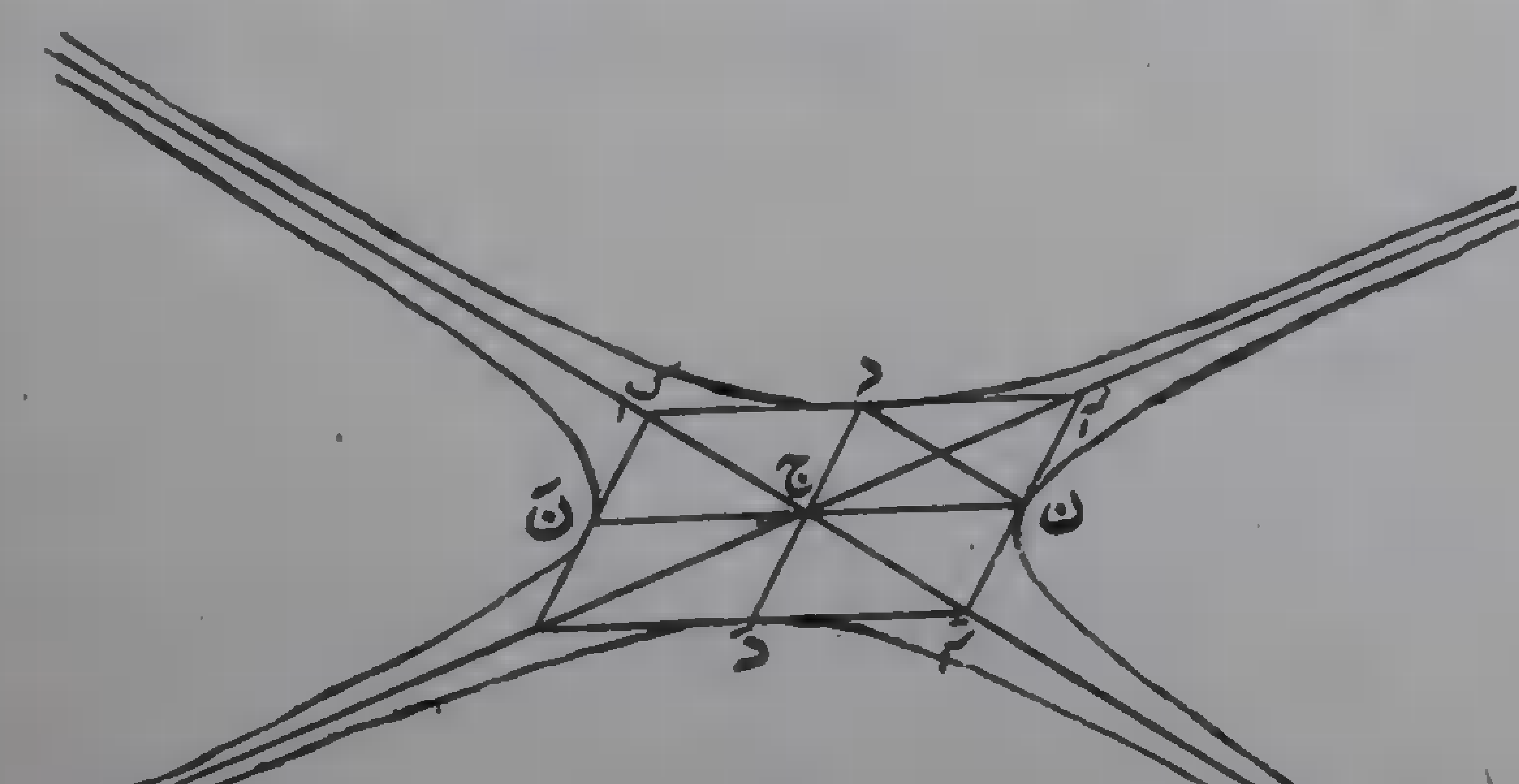
∴ ج ل ' ن قَ کی اور نیز اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج م کے متوازی ہیں [مسئلہ ۲۵]

اسی طرح ج م اُن تمام وتروں کی تنصیف کرتا ہے جو ج ل کے متوازی ہیں اسلئے ج ل ' ج م مزدوج قطر ہیں

مسئلہ ۲۸

اگر قطع زائد اور اُسکے مزدوج کے اُن مقامات پر مماس کھینچے جائیں جہاں مزدوج قطر انکو ملتے ہیں تو یہ مماس ایک ایسی شکل متوازی الاضلاع بنائیں گے جس کے رؤس الزوایا متقاربوں پر واقع ہونگے۔

نیز ثابت کرو کہ ن د ایک متقارب کے متوازی ہے اور دوسرا متقارب اس کی تنصیف کرتا ہے۔



مماس ہ ن ہَ کھینچو جو متقاربوں کو ہ اور ہَ کو ملے۔

ج د کو ملاؤ

تب چونکہ ج د، ج ن کا مزدوج ہے

∴ ج د، ہ ہَ کے متوازی ہے

اور چونکہ د ج دونوں متقاربوں کو ج پر ملتا ہے بذریعہ مسئلہ ۱۲۳(۳) سے

د ج^{۲} = ن ہ × ن ہَ = ن ہ^{۲} [مسئلہ ۲۴]

∴ د ج = ن ہ اور یہ ایکدوسرے کے متوازی ہیں

∴ ہ د، ج ن کے متوازی ہے [اقلیدس م ۱ شکل ۳۳]

∴ ہ د نقطہ د پر مماس ہے [مسئلہ ۲۵]

اسی طرح سے د اور نَ پر کے مماسات متقاربوں پر ملتے ہیں اور چاروں مماس ملکر ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں جس کے روٴس الزوایا متقاربوں پر واقع ہیں۔

ن د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ہ د دوسرے متقارب کو کہ پر ملتا ہے۔

تب ہ ن = ن ہَ

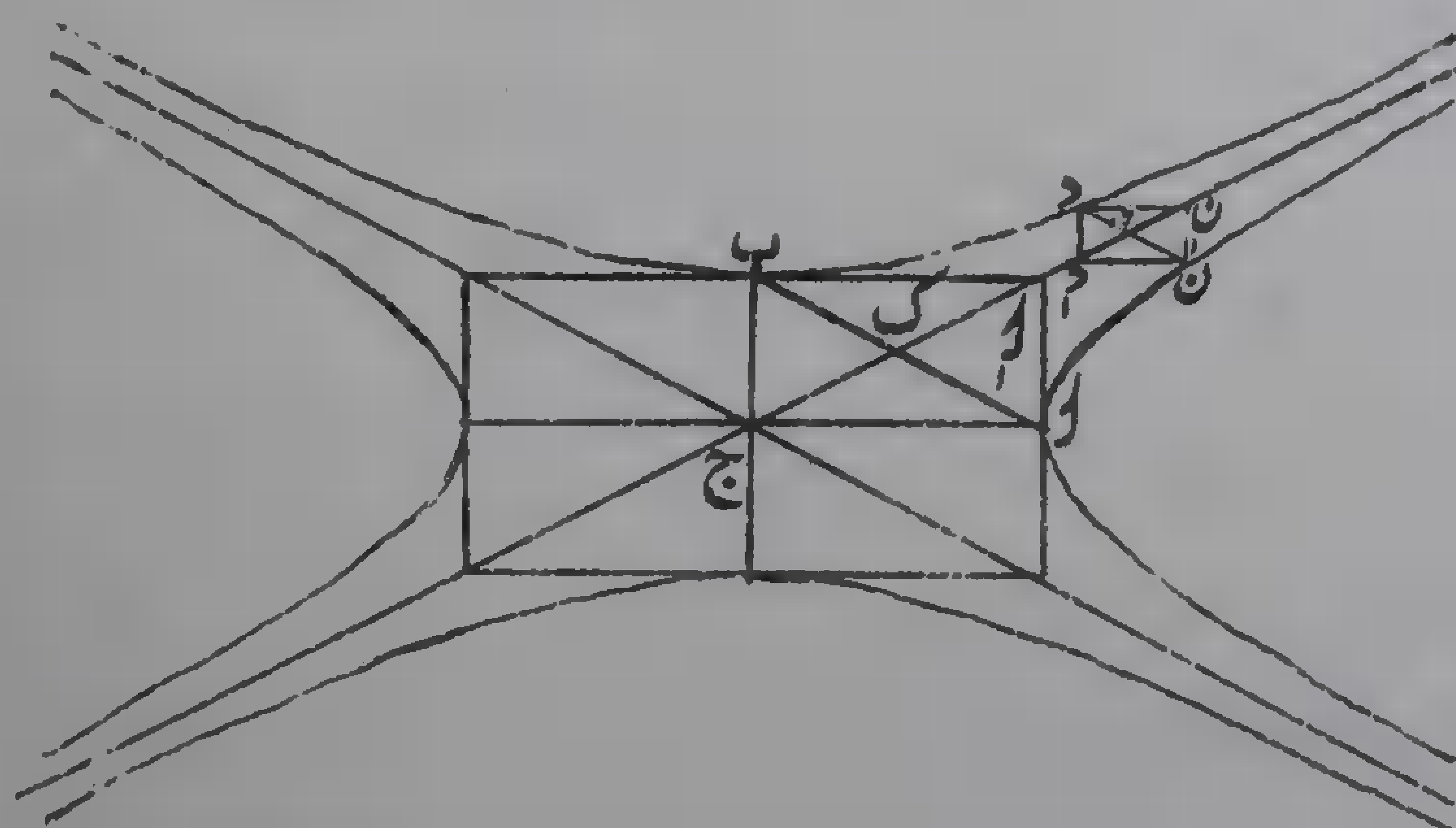
اور ہ د = د کہ

∴ ن د، کہ ہَ کے متوازی ہے۔

اور ج ن ہ د ایک متوازی الاضلاع ہے۔
∴ ن د کی تنصیف اُس نقطہ پر ہوتی ہے جہاں یہ متقارب
سے ملتا ہے
مشقی مثالوں کے لئے دیکھو صفحہ (۱۷۰، ۱۷۱)

مسئلہ ۲۹

اگر ن اور د میں سے محاور کے متوازی مستقیم خط کھینچے
جائیں تو انکے ملنے سے ایک ایسا مستطیل بنے گا جس کے
دو زاویوں کے راس ایک متقارب پر واقع ہونگے



ن ن کو ج ب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ
متقارب کو ن پر ملتا ہے، ن ہ د کو ملاؤ

فرض کرو کہ اب اور ن د متقارب کو ک اور و پر
بالترتیب قطع کرتے ہیں، متقارب، اب اور ن د
دونوں کی تنصیف کرتا ہے اور وہ ایک دوسرے
کے متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۲۸]

اسلئے ن م و ن، اک ا متشابہ مثلث ہیں۔

∴ ن ن م : ا ا = ن و : اک

= ن د : اب [مسئلہ ۲۸]

اور زاویہ ن م ن د = زاویہ ا ا ب

اسلئے مثلث ن م ن د، ا ا ب متشابہ ہیں

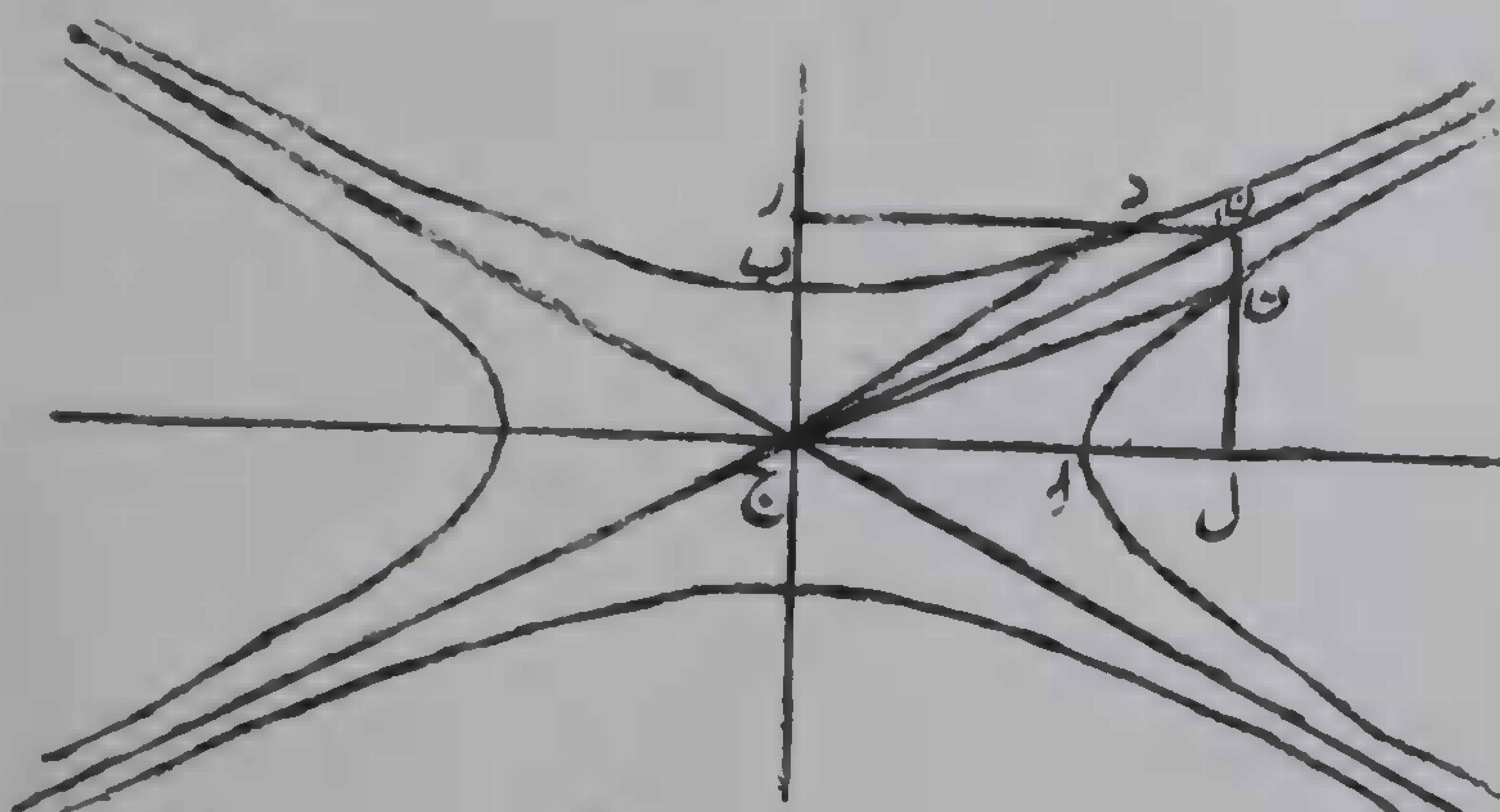
[اقلیدس م ۶ ش ۶]

اسلئے ن م د، ا ب یعنی ج ا کے متوازی ہے۔

اسی طرح سے اگر د م کو ج ب کے متوازی کھینچا جائے
تو ن م ج ا کے متوازی ہوگا۔

مسئلہ ۳۰

ج ن^2 − ج د^2 = ج ا^2 − ج ب^2



محاور پر معین ن ل اور د ر کھینچو اور ان کو اتنا خارج کرو کہ وہ ن$_1$ پر ملیں تب ن$_1$ متقارب پر واقع ہوگا۔

[مسئلہ ۲۹]

تب ج ب^2 = ن$_1$ل^2 − ن ل^2 [مسئلہ ۲۴]

= ج ن$_1^2$ − ج ن^2 [اقلیدس م ا شکل ۴۷]

نیز ج ا^2 = ن$_1$ر^2 − د ر^2 [مسئلہ ۲۴]

= ج ن$_1^2$ − ج د^2 [اقلیدس م ا شکل ۴۷]

∴ ج ا^2 − ج ب^2 = ج ن^2 − ج د^2

مشقی مثالیں مسئلہ ۲۸

ثابت کرو کہ قایم قطع زائد میں

۱۔ ج ن = ج د اور متقارب کسی دو مزدوج قطروں کے درمیانی

زاوئے کی تنصیف کرتے ہیں

۲- ج ن اور ج د محاور سے تکمیلی زاوئے بناتے ہیں

۳- جو قطر ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں وہ مساوی ہوتے ہیں۔

۴- کسی دو قطروں کا درمیانی زاویہ ان کے مزدوج قطروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے۔

۵- کسی وتر کے محاذی قطر ن نَ کے سروں پر جو زاوئے بنیں وہ یا تو مساوی ہونگے یا ایک دوسرے کے مکمل

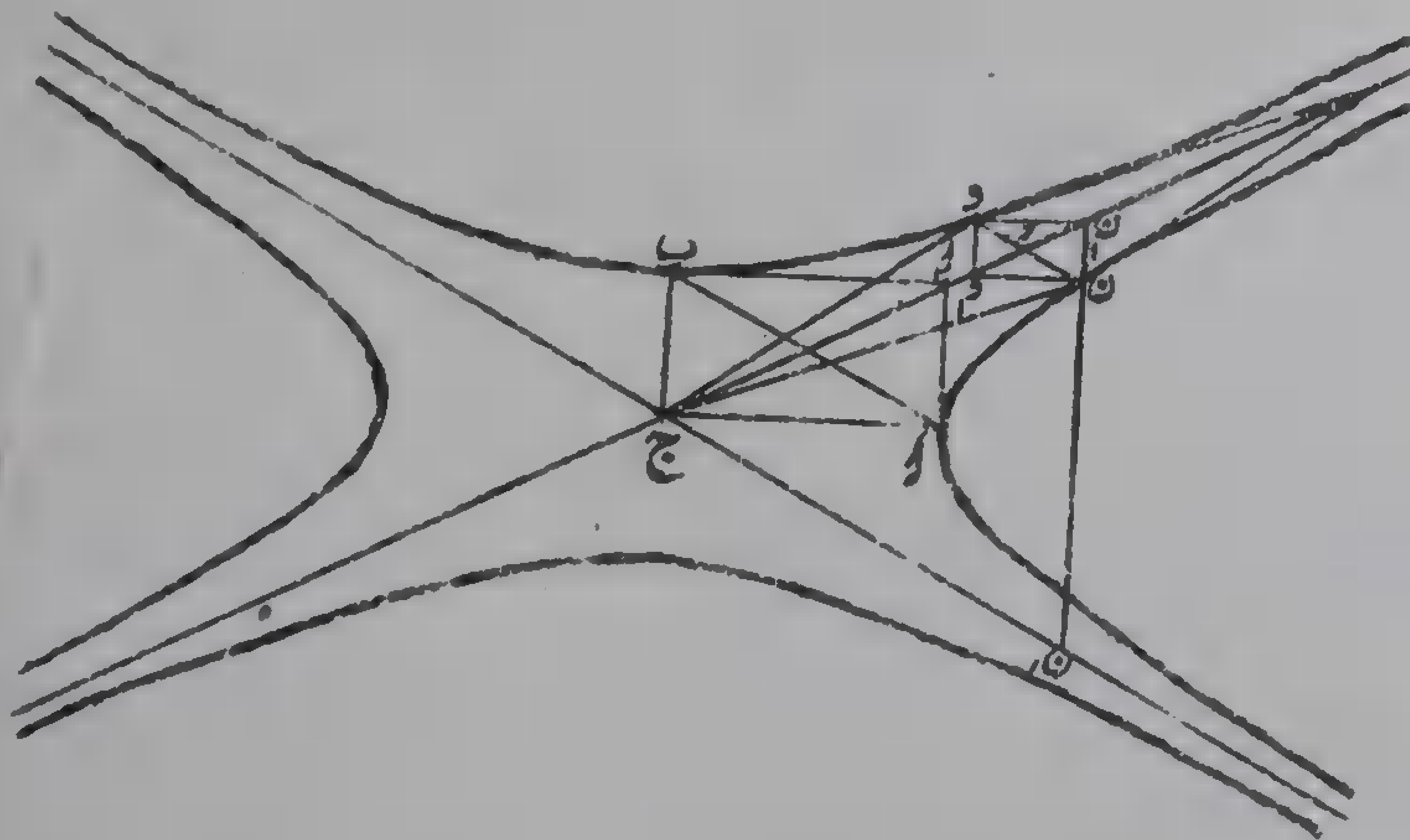
۶- اگر ایک قائم الزاویہ قطع زائد ایک مثلث کے گرد بنایا جائے تو اس کا مرکز کا طریق نونقطی دائرہ ہوگا۔

مسئلہ ۱۳

اگر قطع زائد کا کوئی مماس رہ ن رَہ متقاربوں کو رہ اور رَہ پر ملے تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع ج ن رہ د کا رقبہ مستقل ہے

(یعنی ن ف × ج د = ا ج × ب ج)

نیز مثلث رہ ج رَہ کا رقبہ مستقل ہے



ا ا۱، ب ا۱ کو محاور کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ وہ متقارب کو ا۱ پر ملتے ہیں۔

قطع زائد کے نقطہ ن میں سے گنا معین کھینچو جو متقاربوں کو ن۱، نَ۱ پر ملے۔

متوازی الاضلاع د ن۱ ن د۱ کی تکمیل کرو، د ن کو ملاؤ اور فرض کرو کہ وہ متقارب کو نقطہ و۱ پر ملتا ہے، ا ب کو ملاؤ

تب △ د ج ن : △ د ن۱ ن = ج و۱ : و۱ ن

= نَ۱ ن : ن ن۱

[اقلیدس م ۶ ش ۲]

نیز △ ب ج ا : △ د ن۱ ن = ب ج^۲ : ن ن۱^۲ [اقلیدس م ۶ ش ۱۹]

= ن ن۱ × ن نَ۱ : ن ن۱^۲

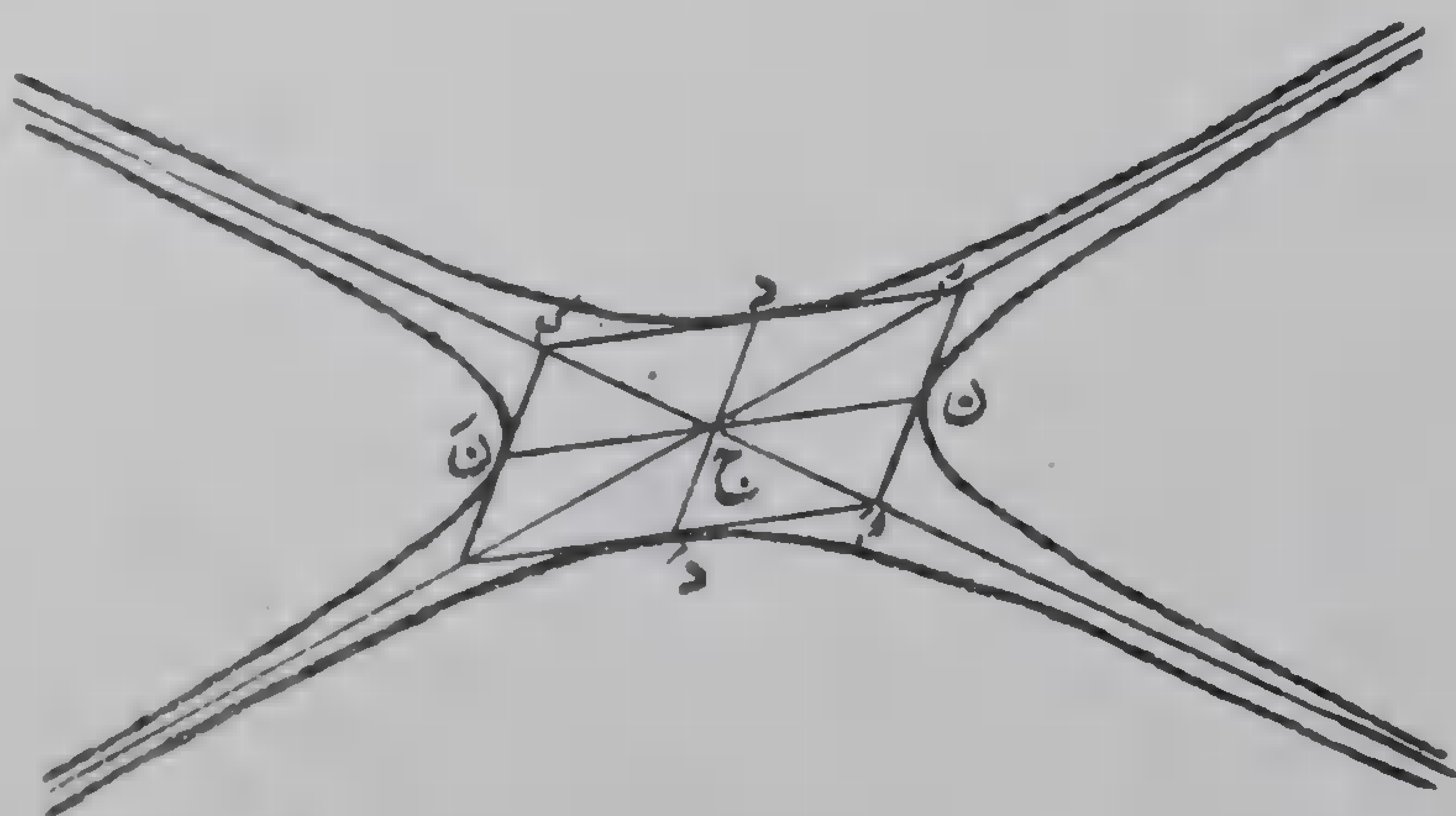
[مسئلہ ۲۲]

= ن نَ : ن ن

اسلئے مثلث د ج ن = مثلث ب ج ا

∴ متوازی الاضلاع ج ن ہ د = متوازی الاضلاع ج ا ہ ب
جس کا رقبہ مستقل ہے

یا ن ف × ج د = ا ج × ب ج [دیکھو شکل مسئلہ ۱۶]



نیز مثلث ہ ج ہَ = متوازی الاضلاع ج ن ہ د
کیونکہ ان میں سے ہر ایک مقدار میں اس متوازی الاضلاع کی ایک چوتھائی ہے جو نقاط ن، د، نَ، دَ، پر مماس کھینچنے سے بنتا ہے

اسلئے مثلث ہ ج ہَ کا رقبہ مستقل ہے

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۱

۱۔ اگر ن و، ن وَ ایک متقارب کے متوازی اس طرح کھینچے

جائیں کہ دوسرے متقارب پر ختم ہوں تو ن و۱ × ن وَ۱ = ۱/۴ ج س۲

۲۔ اگر دو متقارب اور منحنی پر کے ایک نقطہ (تینوں) کے مقام معلوم ہوں تو محور اور ا سکے دریافت کرو۔

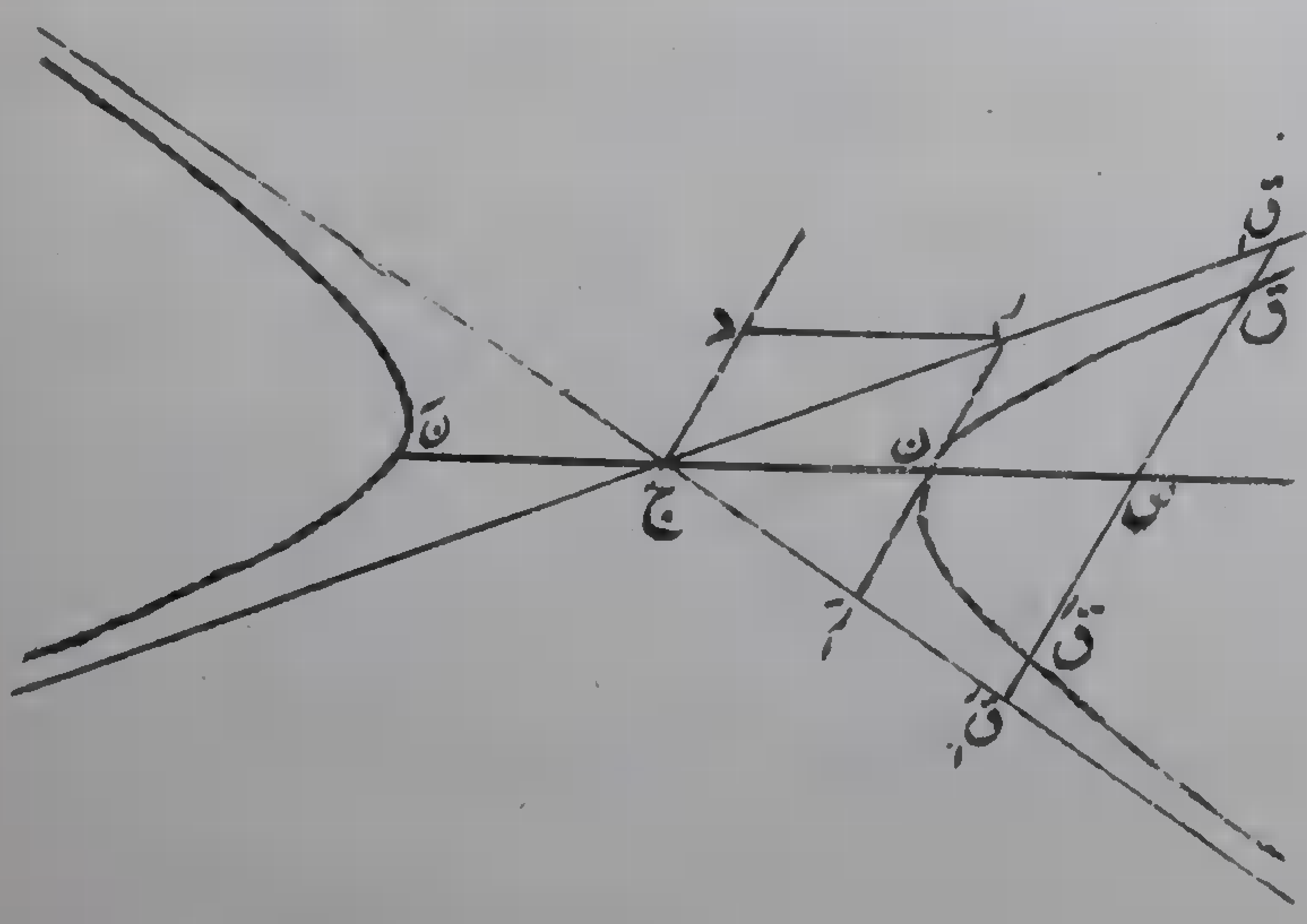
۳۔ ہذلولی کے دو مماس متقاربوں کو ر، ر۱، ط، ط۱ پر بالترتیب ملتے ہیں ثابت کرو کہ ر ط۱، ر۱ ط کے متوازی ہے

۴۔ ایک قائم قطع زائد میں اگر ن پر کے مماس پر عمود ج ے نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ج ے × ج ن = ج ا۲

مسئلہ ۳۲

ق ص قطر ن ج نَ کا معین ہے اور ق ص کے متوازی قطر ج د ہے ثابت کرو کہ

ق ص۲ : ن ص × نَ ص = ج د۲ : ج ن۲



فرض کرو ق ص متقاربوں کو ق۱، قَ۱ پر ملتا ہے، ن
اور د پر کے مماس کھینچو جو متقارب کو ر، ر۱ پر ملیں۔ [مسئلہ ۲۸]

تب ج د^2 = ق ق۱ × ق قَ۱ [مسئلہ ۲۳]

= ق۱ص^2 − ق ص^2

∴ ق ص^2 = ق۱ص^2 − ج د^2

نیز ن ص × نَ ص = ج ص^2 − ج ن^2

متشابہ مثلثات ج ن ر، ج ص ق۱ سے

ج ص^2 − ج ن^2 : ج ن^2 = ق۱ص^2 − ن ر^2 : ن ر^2

= ق۱ص^2 − ج د^2 : ج د^2

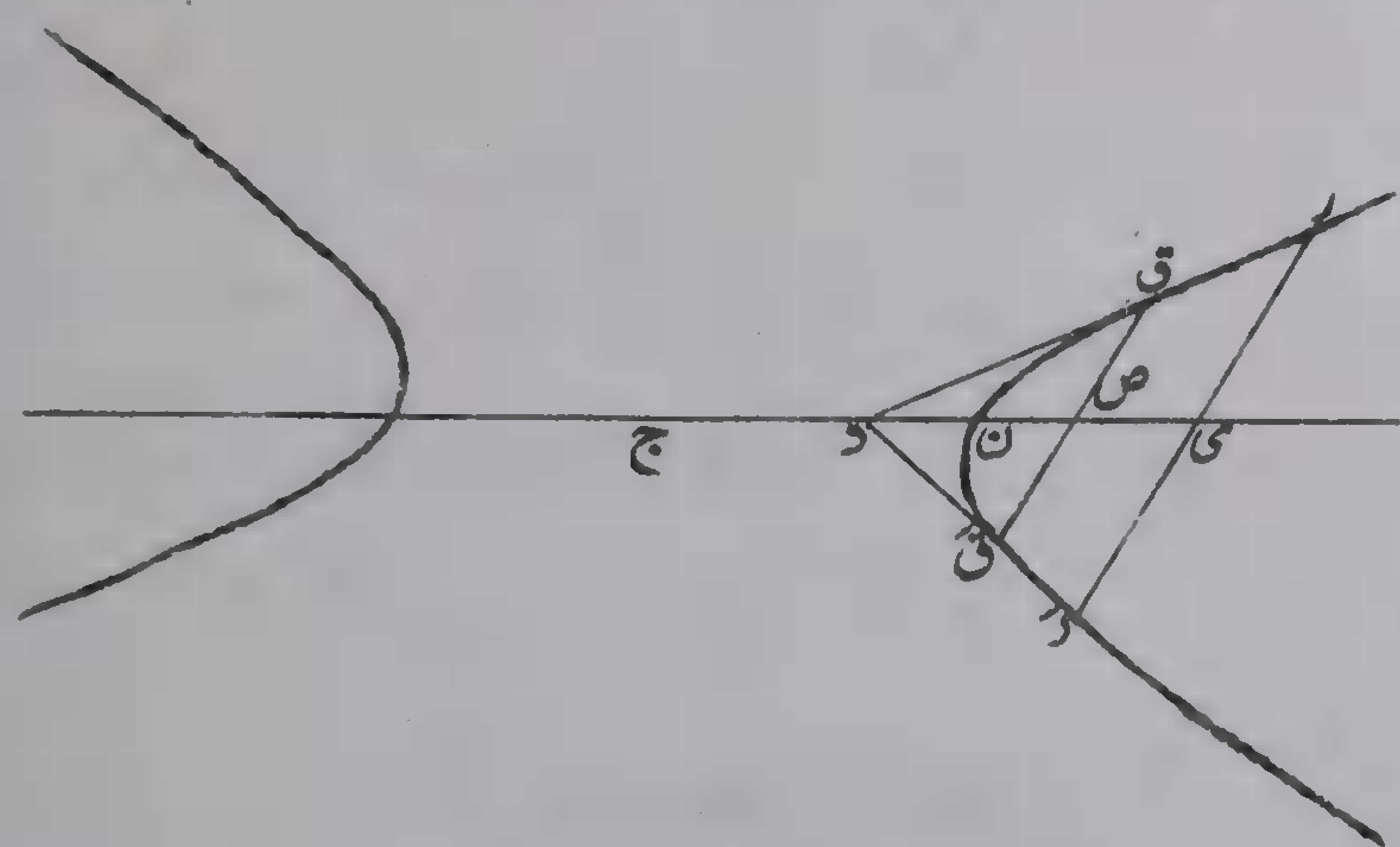
∴ ن ص × نَ ص : ج ن^2 = ق ص^2 : ج د^2

تبدیل نسبت سے ق ص^2 : ن ص × نَ ص = ج د^2 : ج ن^2

قائم قطع زائد میں ق ص^2 = ن ص : نَ ص

مسئلہ ۳۳

کسی وتر کے سروں پر کے مماس اس قطر پر ملتے ہیں جو وتر کی تنصیف کرتا ہے۔



فرض کرو کہ ق قَ اور ر رَ دو متوازی وتر ہیں، ر ق اور
رَ قَ کو ملاؤ اور انکو اتنا خارج کرو کہ وہ و پر ملیں۔
ق قَ کی تنصیف ص پر کرو اور فرض کرو کہ وص ممدودہ
ر رَ کو ی پر ملتا ہے۔

متشابہ مثلثوں سے

ق ص : ر ی = وص : و ی
= قَ ص : رَ ی

لیکن ق ص = قَ ص

∴ ر ی = رَ ی

چونکہ ص ی متوازی وتروں ق قَ، ر رَ کی تنصیف کرتا ہے
اسلئے یہ ایک قطر ہے اور مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔
[مسئلہ ۲۵]

فرض کرو کہ ر، رَ حرکت کر کے آخر کار ق، قَ پر منطبق

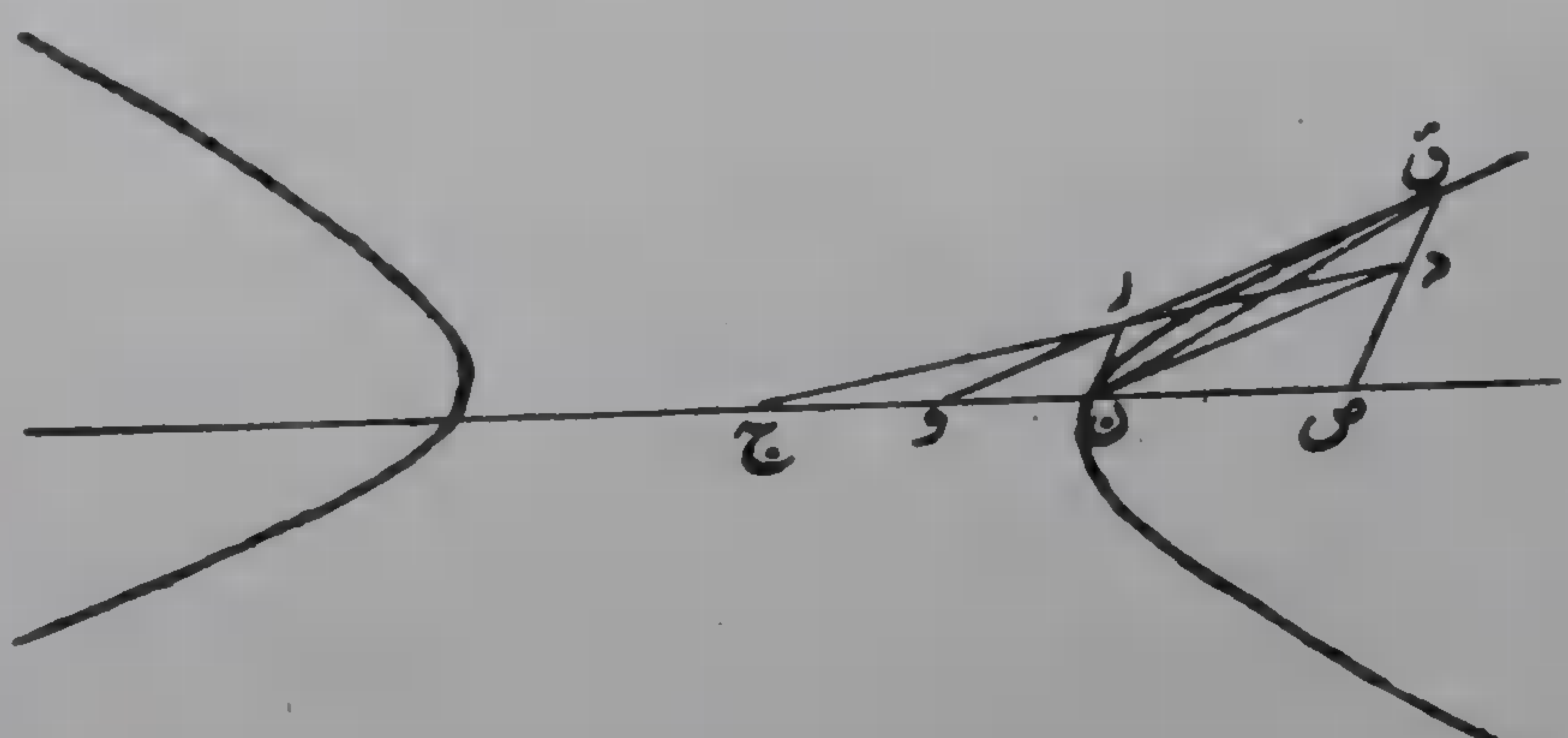
ہوتے ہیں اس وقت وق ر، وقَ رَ بالترتیب ق اور قَ پر کے مماس بن جائیں گے اور قطر ج ص پر ہی ایک دوسرے کو قطع کرینگے۔

اگر کسی مخروطی تراشں میں کوئی قطر مرتب کو ے پر ملے تو س ے ان وتروں پر عمود ہوگا جن کی تنصیف قطر مذکور کرتا ہے۔

مسئلہ ۳۴

ق ص قطر ج ن کا معیّن ہے اگر ق پر کا مماس ج ن کو و پر ملے تو ثابت کرو کہ

ج ص × ج و = ج نؔ



ن د کو وق کے اور ن ر کو ص ق کے متوازی کھینچو، ن ق کو ملاؤ۔

تب ن ر قطع زائد کو مس کرتا ہے [مسئلہ ۲۵]
ر ن د ق ایک متوازی الاضلاع ہے، اسلئے ر د، ن ق کی تنصیف کرتا ہے اور اسلئے ر د مرکز ج میں سے گزرتا ہے۔ [مسئلہ ۳۳]

اب ج و : ج ن = ج ر : ج د [اقلیدس م ۶ شکل ۲]
= ج ن : ج ص [اقلیدس م ۶ شکل ۲]

اسلئے ج ن² = ج د × ج ص

مشقی مثالیں مسئلہ ۳۵

۱۔ اگر ایک قائم قطع زائد مثلث کے گرد بنایا جاے تو ثابت کرو کہ وہ مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزرتا ہے۔

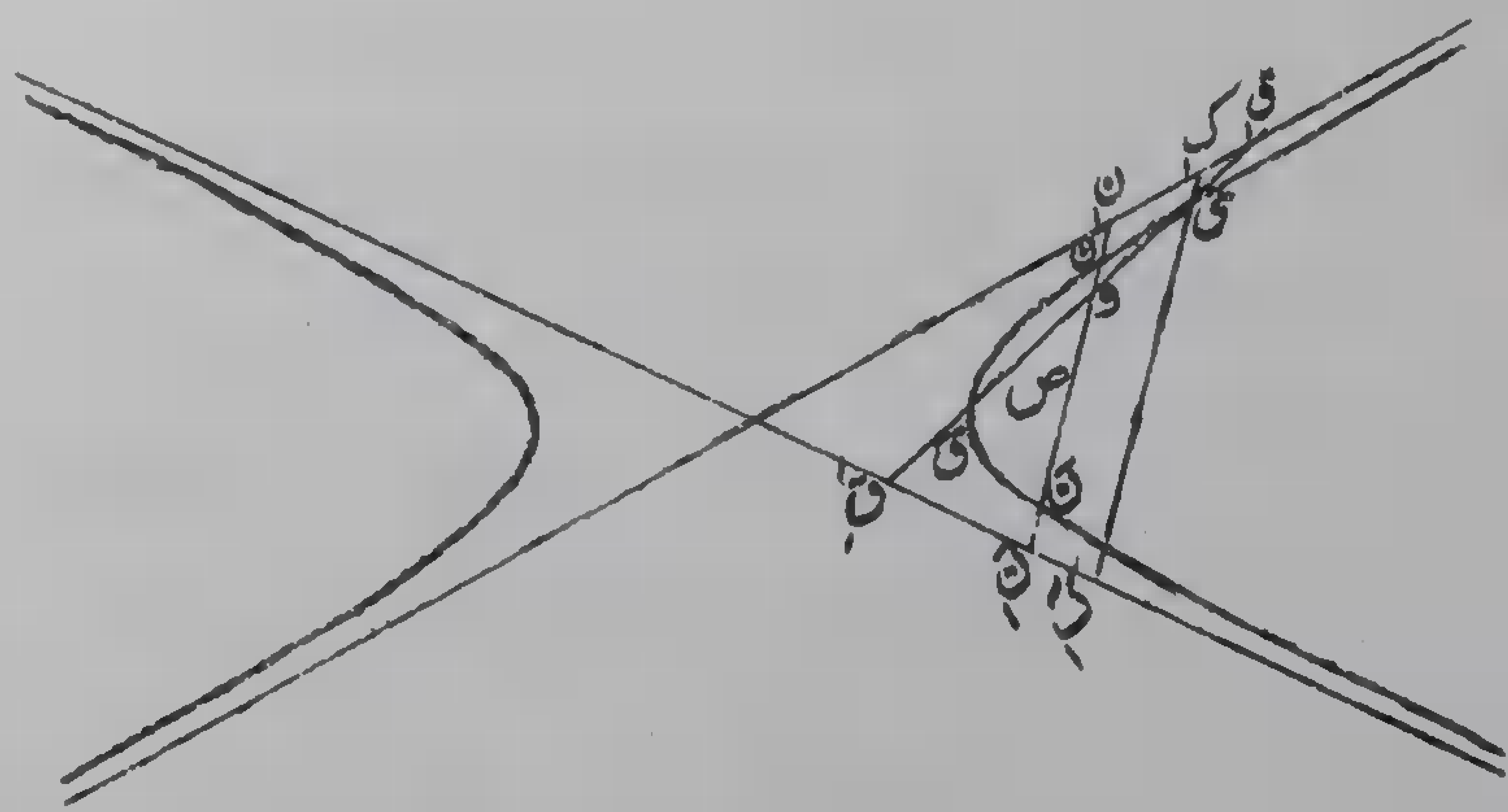
۲۔ اگر و ر کو ایک متقارب کے متوازی کھینچا جائے اور وہ منحنی کو ر پر اور دوسرے متقارب کو ر پر ملے اگر و ن نَ کو ایک ثابت مستقیم خط کے متوازی کھینچا جاے اور و ن نَ منحنی کو ن اور نَ پر ملے تو ثابت کرو کہ و کے تمام مقاماتَ کے لئے حاصل ضرب و ن × و نَ ایسی بدلتی ہے جیسے و ر × ج ر

[اور مشقی مثالوں کے لئے دیکھو قطع ناقص کی بحث میں مسئلہ ۳۴]

مسئلہ ۳۵

اگر قطع زائد کے دو وتر ایک دوسرے کو قطع کریں تو ان کے حصوں کی سطوح (حاصل ضربوں) کو آپس میں

وہی نسبت ہوگی جو انکے متوازی نصف قطروں کے مربعوں کو آپس میں ہے۔



فرض کروکہ وتر ن وَنَ، ق و قَ منتقاربوں کو ن۱، نَ۱ اور ق۱، قَ۱ پر ملتے ہیں ن نَ کی تنصیف ص پر کرو ک۱ ق کَ۱ کو ن۱ نَ۱ کے متوازی کھینچو

تب ن۱ و × و نَ۱ = ن۱ ص۲ ـ و ص۲ [اقلیدس م ۲ شں ۵]

ن و × و نَ = ن ص۲ ـ و ص۲ [اقلیدس م ۲ شں ۵]

∴ ن۱ و × و نَ۱ ـ ن و × و نَ = ن۱ ص۲ ـ ن ص۲

= ن۱ ن × ن نَ۱

[اقلیدس م ۲ شں ۵]

∴ ن۱ و × و نَ۱ ـ ن۱ ن × ن نَ۱ = ن و × و نَ

اسی طرح سے ق۱ و × و قَ۱ ـ ق۱ ق × ق قَ۱ = ق و × و قَ

متشابہ مثلثوں سے

ن و : ق و = ک ق : ق ق

اور و نَ : و قَ = ق کَ : ق قَ

∴ ن و × و نَ : ق و × و قَ = ک ق × ق کَ : ق ق × ق قَ

= ن ن × ن نَ : ق ق × ق قَ [مسئلہ ۲۳]

∴ ن و × و نَ - ن ن × ن نَ : ق و × و قَ - ق ق × ق قَ

= ن ن × ن نَ : ق ق × ق قَ

یا ن و × و نَ : ق و × و قَ = ن ن × ن نَ : ق ق × ق قَ

= متوازی نصف فقروں کے مربعوں کی نسبت کے

[مسئلہ ۲۴]

مسائل جو خاص طور پر قائم قطع زائد کے متعلق ہیں

۱- ج س^2 = ۲ ج ا^2 ، ج س = ۲ ج لا ، ل = ۲ا

۲- ن ل^2 = ا ل × ل اَ

۳- وتر خاص = ا اَ

۴- ج ل = ل گ

۵- ثابت کرو کہ ایک دائرہ جس کا مرکز منحنی پر کا کوئی نقطہ ن ہو اور نصف قطر ن ج ، وہ عماد کو محاور پر اور مماس کو متقاربوں پر قطع کریگا۔

ن ج = ن گ = ن گ = ن ر = ن رَ

۶- مزدوج قطر مساوی ہوتے ہیں اور متقارب انکے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتے ہیں۔

۷- مزدوج قطر کسی ایک محور سے ایسے زاوئے بناتے ہیں

جو ایک دُوسرے کے متمم ہوتے ہیں۔

۸۔ قائم الزاویہ قطر مساوی ہوتے ہیں

۹۔ کسی دو قطروں کا درمیانی زاویہ ان کے مزدوج قطروں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہوتا ہے

۱۰۔ ایک قطر ن نَ کے سروں پر کسی وتر کے محاذی جو زاوئے بنیں وہ یا تو مساوی ہوتے ہیں یا ایک دوسرے کے تکمل۔

۱۱۔ اگر ن پر کے مماس پر ج سے عمود نکالا جائے تو
ج ے × ج ن = ج اَ^{2}

۱۲۔ اگر ایک قائم ہذلولی ایک مثلث کے گرد کھینچ سکے تو یہ مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزریگا۔

۱۳۔ اگر ایک قائم ہذلولی ایک مثلث کے گرد بنایا جائے تو اس کے مرکز کا طریق نو نقطی دائرہ ہوگا۔

اسطوانہ اور مخروط

اگر ایک مستطیل کو اس کے ایک ضلع کے گرد پھرایا جائے تو مقابل کا ضلع ایک ایسی سطح مرتسم کرتا ہے جس کو قائم مستدیر اسطوانہ کہتے ہیں۔

ہم مستطیل اور اس کے طول کو دونوں طرف لا تناہی تک پھیلا ہوا خیال کر سکتے ہیں جس ثابت ضلع کے گرد مستطیل چکر لگاتا ہے اسکو اسطوانہ کا محور کہتے ہیں۔

تعریف اگر ایک مستقیم خط دائرہ کے محیط کے گرد حرکت کرے اور ہمیشہ ایک ایسے ثابت مستقیم خط کے متوازی رہے جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو اور سطح دائرہ پر عمود ہو تو جو سطح یہ متحرک مستقیم خط مرتسم کریگا اس کو قائم مستدیر اسطوانہ کہتے ہیں۔

تعریف اس ثابت مستقیم خط کو اسطوانہ کا محور کہتے ہیں

نوٹ۔ اگر ایک سطح مستوی اسطوانہ کو محور کے متوازی کاٹے تو اس تراش اسطوانہ کے دو مولِّد خط حاصل ہوں گے اگر کاٹنے والی مستوی سطح محور پر عمود ہو تو تراش دائرہ ہو گی۔

تعریف اگر ایک سطح مستوی ایک اسطوانہ کو کاٹے تو جو سطح مستوی اسطوانہ کے محور میں سے گزرتی ہو اور کاٹنے والی سطح پر عمود ہو اسکو محوری سطح کہتے ہیں

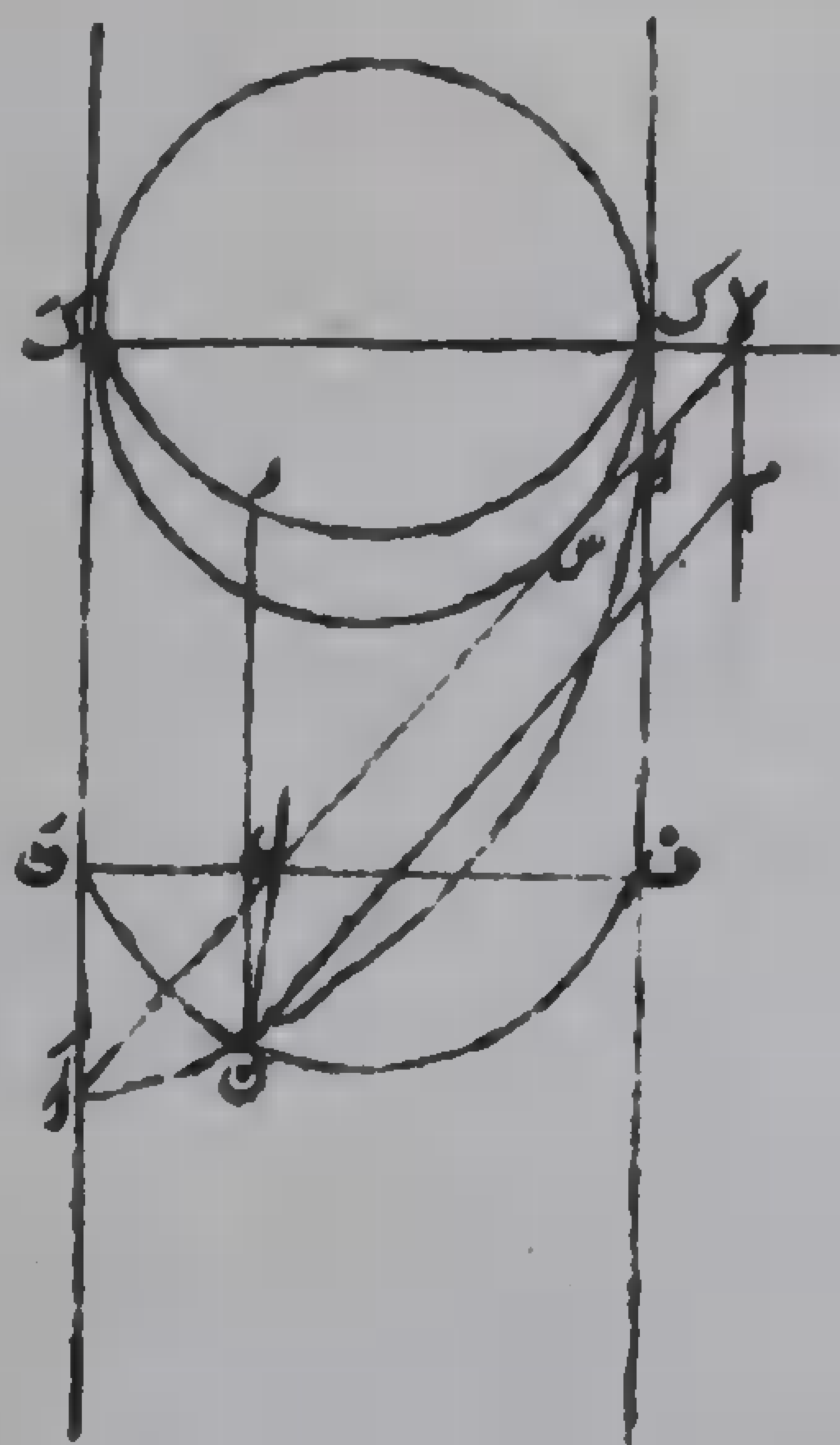
نوٹ محوری سطح اور کاٹنے والی سطح کا خط تقاطع تراش (کے منحنی) کا محور ہوتا ہے اور محوری سطح اور اسطوانہ کا تقاطع دو مولِّد خط ہوتے ہیں

تعریف اگر ایک کرہ اسطوانہ کے اندر اسطرح بنایا جائے کہ وہ اسطوانہ کو ایک دائرہ کے ہر ایک نقطہ پر مس کرے اور کاٹنے والی سطح کو ایک نقطہ پر مس کرے تو اس کو ماسکی کرہ کہتے ہیں

مسئلہ ۱

اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے جو محور سے کوئی زاویہ بنائی ہو تو تراش قطع ناقص ہو گی۔

فرض کرو کہ تراش کا منحنی ا ن اَ ہے،



فرض کرو کہ محوری سطح کاغذ کی سطح ہے اور یہ کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم اَ ا لا پر اور اسطوانہ کو تولیدی خطوط ک ا ف، کَ فَ اَ پر ملتی ہے۔

ایک ماسکی کرہ کھینچو جو اسطوانہ کو دائرہ ک ر کَ کے ہر ایک نقطہ پر اور کاٹنے والی سطح کو س پر مس کرے

فرض کرو کہ سطوح مستویہ کَ ر ک، اَ ن ا ایک دوسرے کو خط مستقیم لا م پر قطع کرتی ہیں

منحنی ا ن اَ کے کسی نقطہ ن میں سے ایک ایسی مستوی سطح فَ ن ف ل کھینچو

جو محورِ اسطوانہ پر عمود ہو کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ن ل پر ملے محوری سطح کو مستقیم خط ف ل فَ پر ، اور اسطوانہ کو دائرہ ف ن فَ پر ملے۔

نقطہ ن میں سے تولیدی خط ن ر کھینچو جو ماسکی کرہ کو ر پر مس کرے، نیز ن م کو ل لا کے متوازی کھینچو

فرض کرو کہ س ن کو ملایا گیا ہے

چونکہ سطوح مستویہ ا ن اَ ، ف ن فَ دونوں محوری سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ل محوری سطح پر عمود ہے (اقلیدس م ۱۱ شں ۱۹) اس لئے ن ل ، ا اَ اور ف فَ دونوں پر عمود ہے

اگر ایک ہی نقطہ سے کرہ کے مماس کھینچے جائیں تو وہ سب مساوی ہوتے ہیں (اقلیدس م ۳ ش ۳۶)

∴ س ن = ن ر = ف ک

اور س ا = ا ک اور ن م = ل لا

لیکن ف ک : ل لا = اک : الا [اقلیدس م ۶ ش ۲]

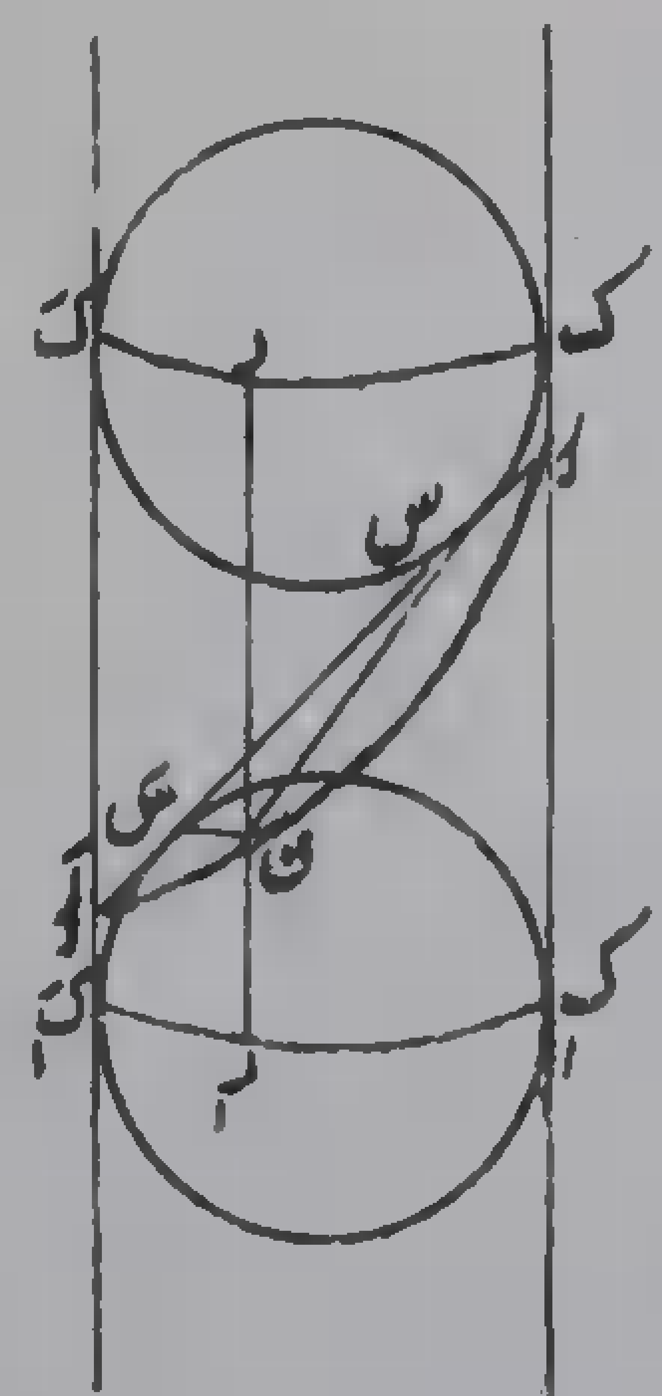
∴ س ن : ن م = س ا : الا

اب اک ، الا سے طول میں کم ہے [اقلیدس م ا ش ۱۹]

اس لئے س ا : الا ایک ایسی مستقل نسبت ہے جو ایک سے کم ہے اور ان کا ایک قطع ناقص ہے

جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب لام

مسئلہ ا (دوسرا طریقہ)



فرض کرو کہ ان اَ تراش کا منحنی ہے، فرض کرو کہ محوری سطح کاغذ کی سطح پر منطبق ہوتی ہے اور کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ا اَ پر اور اسطوانہ کو تولیدی خطوط ک اک، کَ اکَ پر ملتی ہے دو ماسکی کُرے کھینچو جو اسطوانہ کو دوائر ک رکَ، ک رکَ، کے گرد اور کاٹنے والی سطح کو س اور سَ پر مس کریں۔

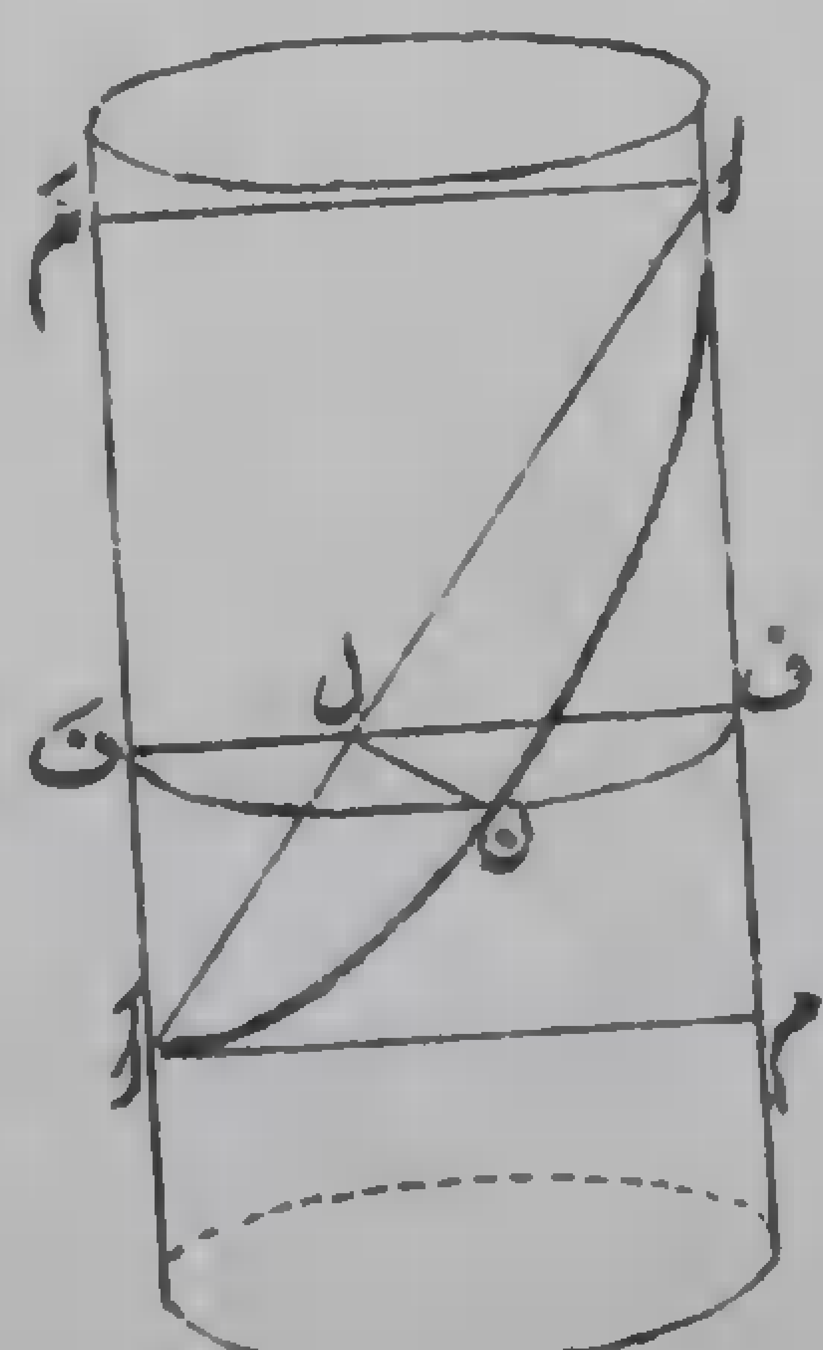
منحنی ان اَ کے کسی نقطہ ن میں سے ایک تولیدی خط رن ر کھینچو جو ماسکی کرہ کو ر، ر پر مس کرے ن س، ن سَ کو ملاؤ،

یہ خطوط بھی ماسکی کرون کو مس کرینگے
تب س ن = ن ر کیونکہ یہ کرہ کے مماس
ہیں اور سَ ن = ن رَ

∴ س ن + سَ ن = ن ر + ن رَ = ر رَ = ک کَ

اس لئے منحنی مذکور قطع ناقص ہے اسکے ماسکے
س، سَ ہیں اور اس کا محور اعظم ک کَ
ہے (مسئلہ ۸ قطع ناقص)

مسئلہ ا (تیسرا طریقہ)



فرض کرو کہ ا ن اَ تراشش کا منحنی ہے
محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو
اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم

اٰ اَ اور اسطوانہ کو تولیدی خطوط اف م، اَفَ مَ پر ملتی ہے

منحنی کے کسی نقطہ ن میں سے ایک سطح فَ ن ف ل کھینچو جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہو، کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ن ل محوری سطح کو خط مستقیم ف ل فَ اور اسطوانہ کو دائرہ ف ن فَ پر ملے

ا مَ اور اَم کو ک کَ کے متوازی کھینچو چونکہ سطوح ک ل کَ ، ا ن اَ دونون محوری سطح پر عمود ہیں اسلئے ن ل محوری سطح پر عمود ہے

(اقلیدس م۹ ش۱۹)

اسلئے ن ل، ف فَ اور ا اَ دونوں پر عمود ہے۔
متشابہ مثلثوں سے۔

ا ل : ل ف = ا اَ : اَ م

اور اَ ل : ل فَ = اَ ا : ا مَ

∴ ا ل × اَ ل : ل ف × ل فَ = ا اَ^۲ : اَ م × ا مَ

∴ ا ل × ل اَ : ن ل^۲ = ا اَ^۲ : ا مَ^۲ [اقلیدس م۳ ش۳۵]

پس معلوم ہوا کہ تراش مجوزہ قطع ناقص ہے جس کا محور اعظم ا اَ ہے اور محور اصغر ا مَ [قطع ناقص مسئلہ۳]

اگر ایک قائم الزاویہ مثلث اپنے ایک ضلع کے گرد جو زاویہ قائمہ کا ایک طرف سے احاطہ کرتا ہو چکر لگائے تو مثلث کا وتر ایک ایسی سطح مرتسم کرتا ہے جس کو قائم مستدیر **مخروط** کہتے ہیں

وتر کے طول کو ہم دونوں طرف غیر متناہی فاصلے تک پھیلا ہوا خیال کر سکتے ہیں۔

جس ثابت ضلع کے گرد مثلث چکر لگاتا ہے اسکو مخروط کا **محور** کہتے ہیں۔

مثلث کے اس زاویہ کو جہاں وتر اور ثابت ضلع ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں مخروط کا **راس** کہتے ہیں

اگر وتر کو راس کے دونوں طرف غیر متناہی فاصلے تک خارج کیا جائے تو اس طرح سے جو مکمل مخروط بنتا ہے اس کے دو مساوی اور متشابہ اوراق راس کے مقابل کی جانبوں میں ہوتے ہیں

تعریف اگر ایک مستقیم خط ایک دائرہ کے محیط کے گرد حرکت کرے اور ہمیشہ ایک ایسے ثابت مستقیم خط کے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے جو دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہو اور سطح دائرہ پر عمود ہو تو جو سطح یہ متحرک مستقیم خط مرتسم کریگا اُس کو

قائم مستدیر مخروط کہتے ہیں

تعریف اس ثابت مستقیم خط کو مخروط کا محور کہتے ہیں

تعریف محور کے نقطۂ ثابتہ کو مخروط کا راس کہتے ہیں

نوٹ اگر مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹا جائے جو راس میں سے گذرتی ہو تو مخروط کی تراش ایک نقطہ یا اس کے دو تولیدی خط ہوں گے اگر یہ سطح محور پر عمود ہو اور راس میں سے نہ گذرے تو تراش دائرہ ہوگی

تعریف اگر ایک سطح ایک مخروط کو کاٹے تو جو سطح مخروط کے محور میں سے گذرتی ہو اور کاٹنے والی سطح پر عمود ہو اسکو محوری سطح کہتے ہیں

نوٹ محوری سطح اور کاٹنے والی سطح کا خط تقاطع تراش کے منحنی کا محور ہوتا ہے اور محوری سطح اور مخروط کے تقاطع سے مخروط کے دو تولیدی خط حاصل ہوتے ہیں۔

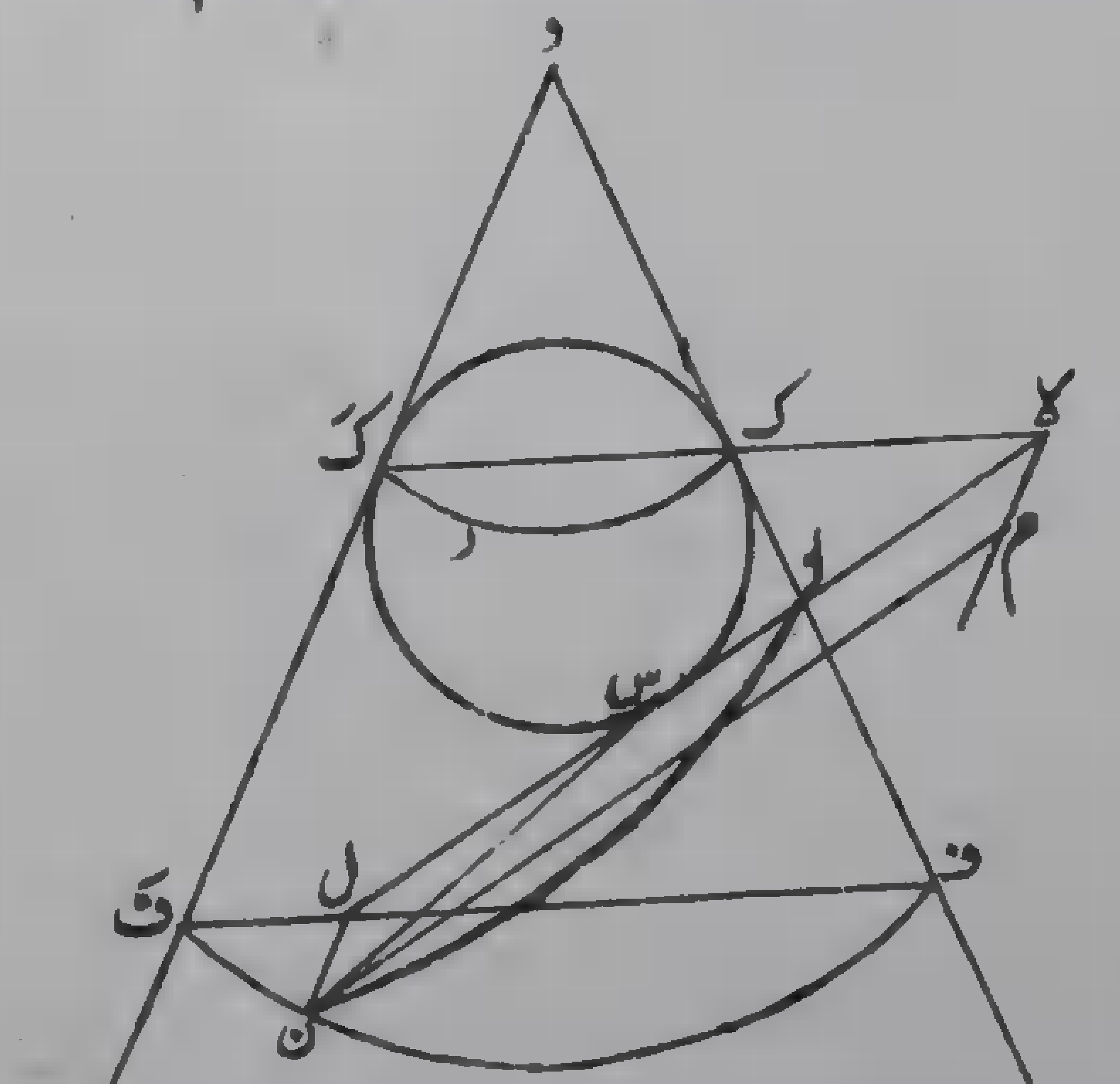
تعریف اگر ایک کرہ مخروط کے اندر ایسا بنایا جائے جو مخروط کو ایک دائرہ کے ہر ایک نقطہ پر اور کاٹنے والی سطح کو ایک نقطہ پر

مس کرے تو اس کرہ کو **ماسکی کرہ** کہتے ہیں

مسئلہ ۲

اگر ایک مخروط کو ایک ایسی سطح سے کاٹیں جو راس میں سے نہ گذرتی ہو اور محور پر عمود نہ ہو تو اس طرح سے جو تراش حاصل ہو گی وہ تراش مخروطی کی تعریف کو پورا کرے گی

(س ن = ر × ن م)



فرض کرو کہ تراش کا منحنی ا ن ہے محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ل ا لا پر اور مخروط کو تولیدی خطوط و کَ ا فَ،

وک ق پر ملتی ہے۔
ایک ماسکی کرہ کھینچو جو مخروط کو دائرہ ک رکَ کے گرد اور کاٹنے والی سطح کو س پر مس کرے
فرض کرو کہ سطوح کَ رک اور ن ا ایک دوسرے کو مستقیم خط لام پر قطع کرتی ہیں۔
منحنی ا ن کے کسی نقطہ ن میں سے ایک سطح فَ ن ف ل کھینچو جو مخروط کے محور پر عمود ہو اور کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ن ل پر، محوری سطح کو مستقیم خط ف ل فَ پر اور مخروط کو دائرہ ف ن فَ پر ملے
فرض کرو کہ تولیدی خط ن ر د کھینچا گیا ہے یہ ماسکی کرہ کو ر پر مس کرے گا۔
نیز ن م کو ل لا کے متوازی کھینچو۔
چونکہ سطوح ا ن، ف ن فَ دونوں محوری سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ل محوری سطح پر عمود ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹)
اس لئے ن ل، ا ل اور ف فَ دونوں پر عمود ہے
اگر ایک ہی نقطہ سے کرہ پر مماس کھینچے جائیں تو وہ سب مساوی ہوتے ہیں [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اس لئے س ن = ن ر = ف ک

اور س ا = اک اور ن م = ل لا

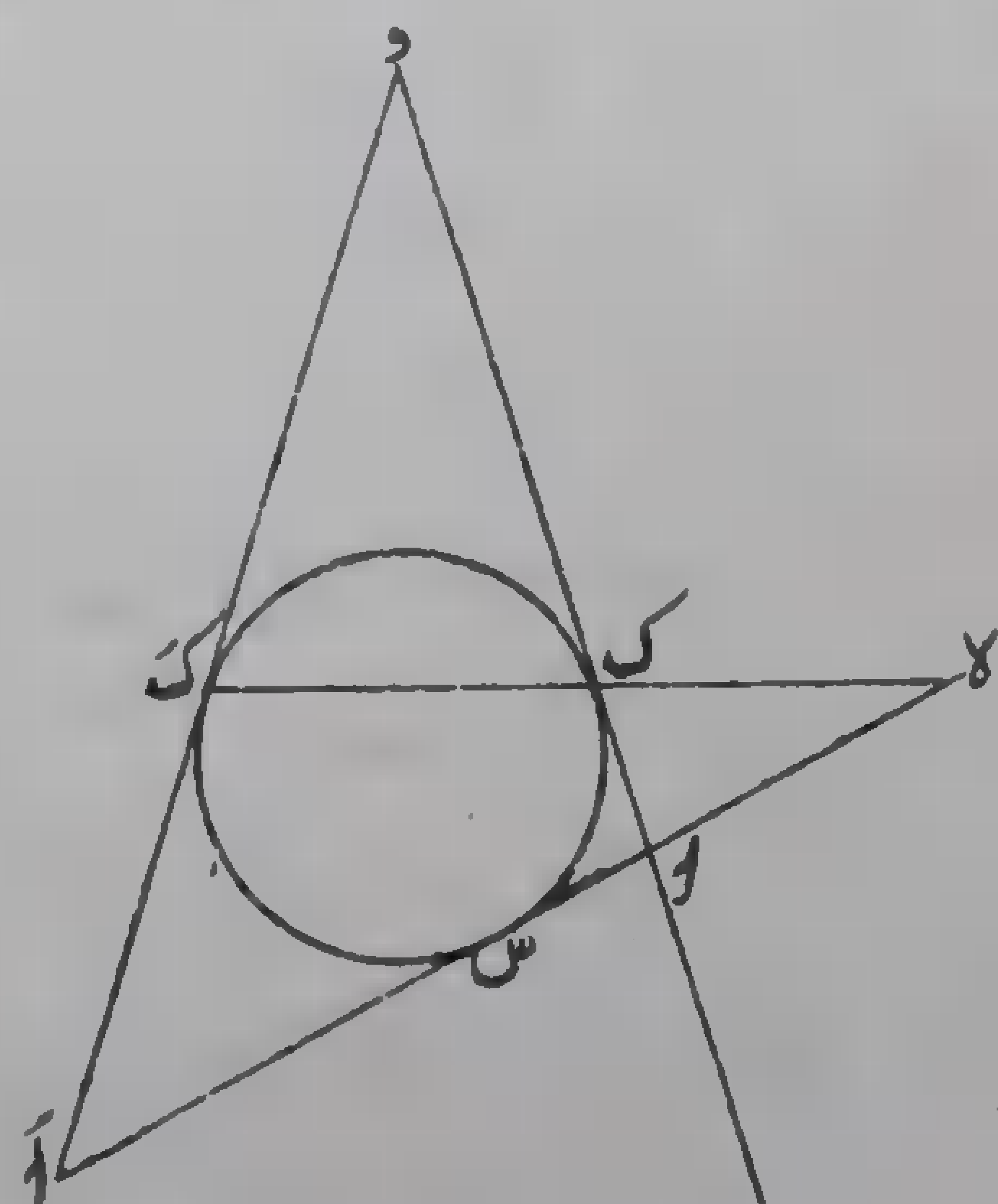
لیکن ف ک : ل لا = اک : ا لا [اقلیدس م ۶ ش ۲]

∴ س ن : ن م = س ا : ا لا

اس لئے ا ن اَ تراش مخروطی ہے جس کا ماسکہ س ہے اور مرتب لا م

مسئلہ ۳

مخروط کی ایک مستوی تراش قطع ناقص ہو گی اگر اس کا ماسکی محور محوری سطح پر کے دونوں تولیدی خطوں کو مخروط کے ایک ہی ورق پر ملے، یہ تراش مکافی ہوگی اگر اس کا ماسکی



محور ان دو تولیدی خطوں میں سے ایک کے

متوازی ہو، اور یہ تراش قطع زائد ہو گی اگر اس کا ماسکی محور ان تولیدی خطوں کو ملے مگر مخروط کے مختلف ورقوں پر۔

فرض کرو کہ محوری سطح کاٹنے والی سطح کو ا لا پر، ماسکی کرہ کو دائرہ ک کَ س پر، اور مخروط کو تولیدی خطوط و ک ا، و کَ پر ملتی ہے، کَ ک اور س ا کو اتنا خارج کرو کہ وہ مرتب کے پائین لا پر ملیں

صورت اول اس کو اتنا خارج کرو کہ و کَ کو اَ پر ملے

زاویہ و کَ لا > زاویہ کَ لا اَ [اقلیدس م ا ش ۱۶]

لیکن زاویہ و کَ لا = زاویہ و ک کَ [اقلیدس م ا ش ۵]

= زاویہ ا ک لا [اقلیدس م ا ش ۱۵]

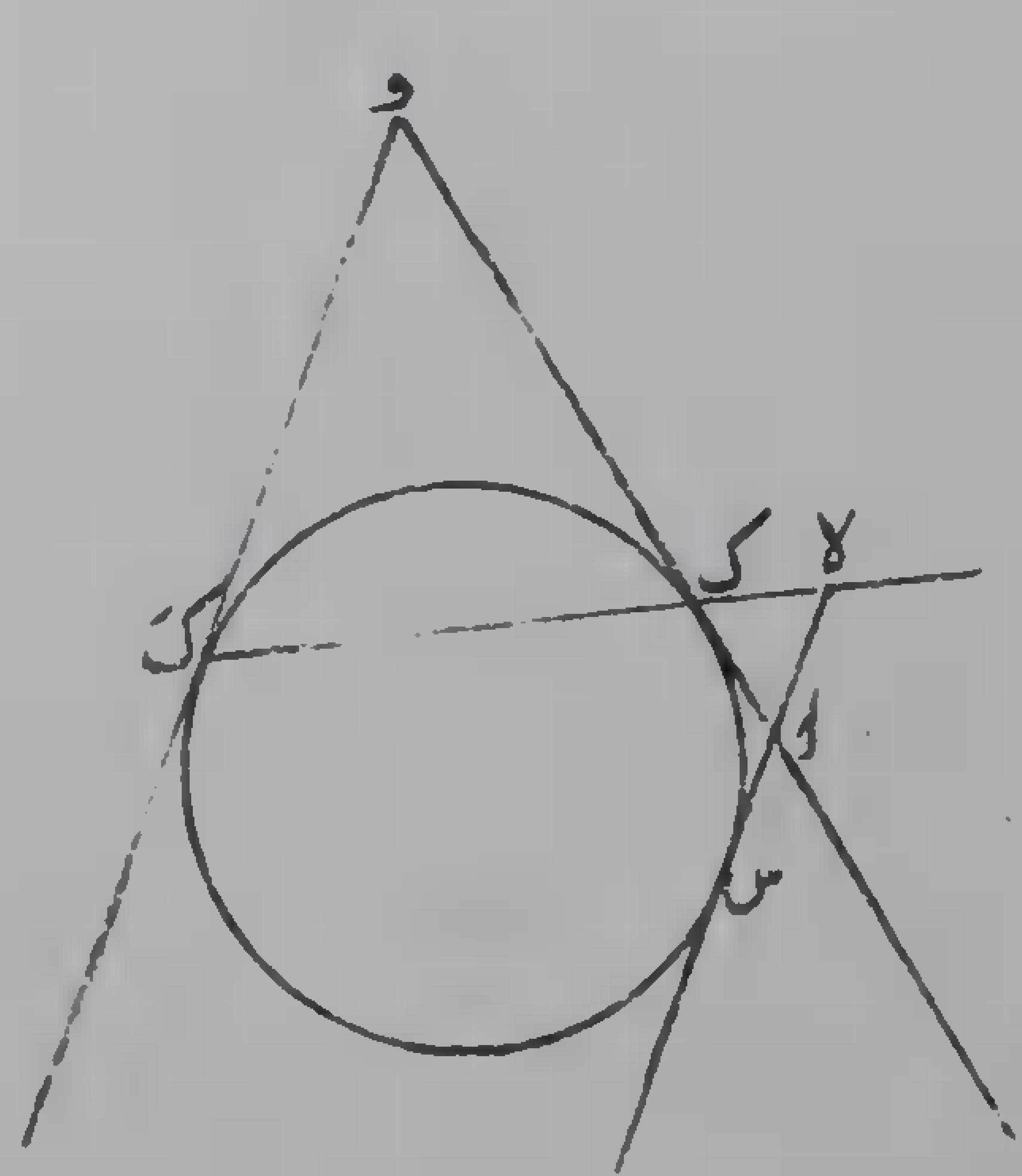
∴ زاویہ ا ک لا > زاویہ کَ لا اَ یا ک لا ا

∴ ا ک > ا لا [اقلیدس م ا ش ۱۹]

∴ س ا > ا لا [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اس لئے منحنی قطع ناقص ہے

صورت دوم۔ اگر ا س، وکَ کے متوازی ہو



زاویہ اک لا = زاویہ وک کَ

= زاویہ وکَ ک

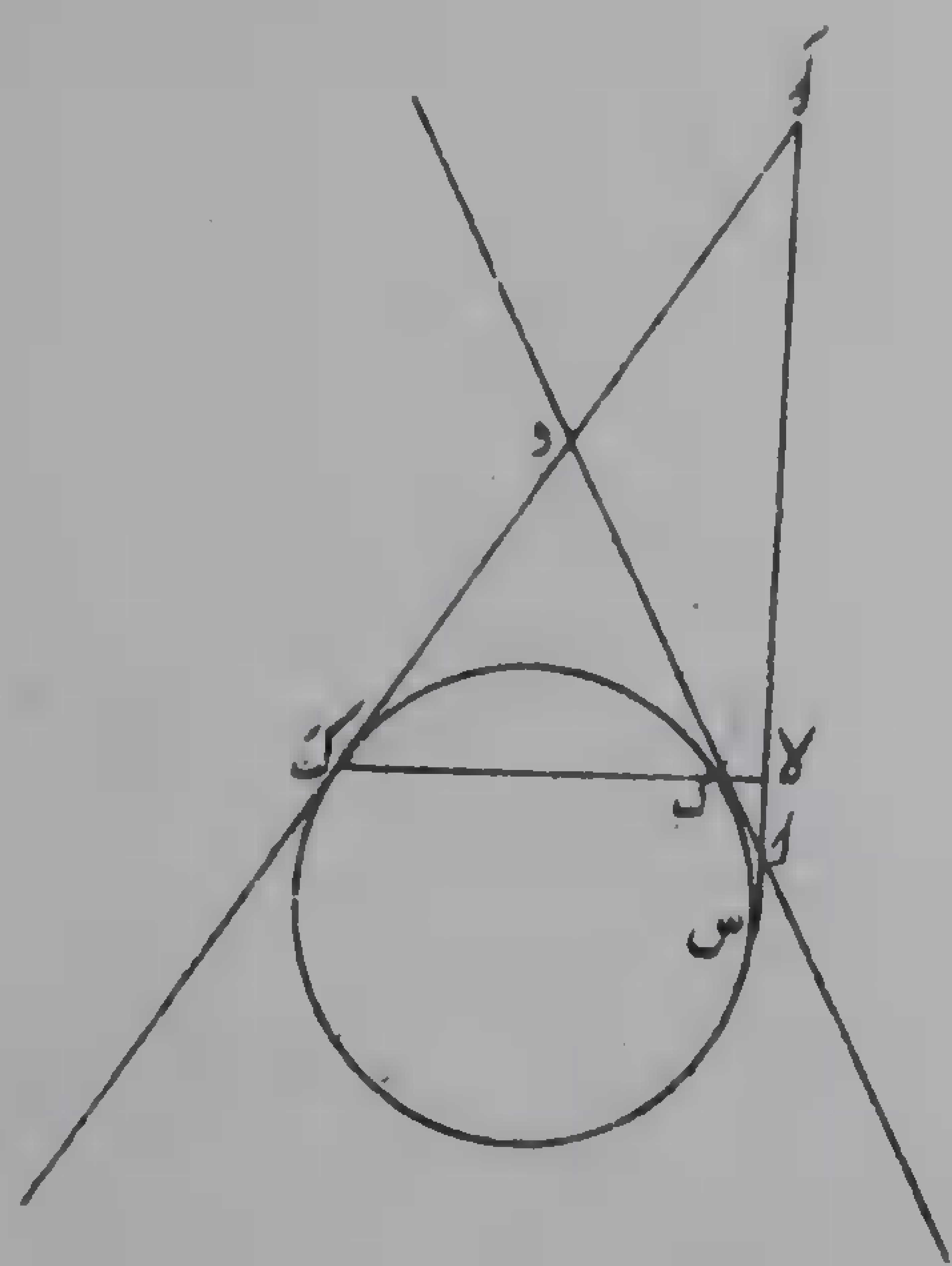
= زاویہ ک لا ا [اقلیدس م ا ش ۲۹]

∴ اک = الا [اقلیدس م ا ش ۵]

∴ س ا = الا [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اور منحنی قطع مکافی ہے۔

صورت سوم س ا کو اتنا خارج کرو کہ وہ کَ و ممدودہ کو اَ پر ملے



زاویہ وکَ لا > زاویہ کَ لا ا [اقلیدس م ا ش ۱۶]

لیکن زاویہ وکَ لا = زاویہ وک کَ [اقلیدس م ا ش ۵]

= زاویہ اک لا [اقلیدس م ا ش ۱۵]

∴ زاویہ اک لا > زاویہ کَ لا ا یا ک لا ا

∴ اک > ا لا [اقلیدس م ا ش ۱۹]

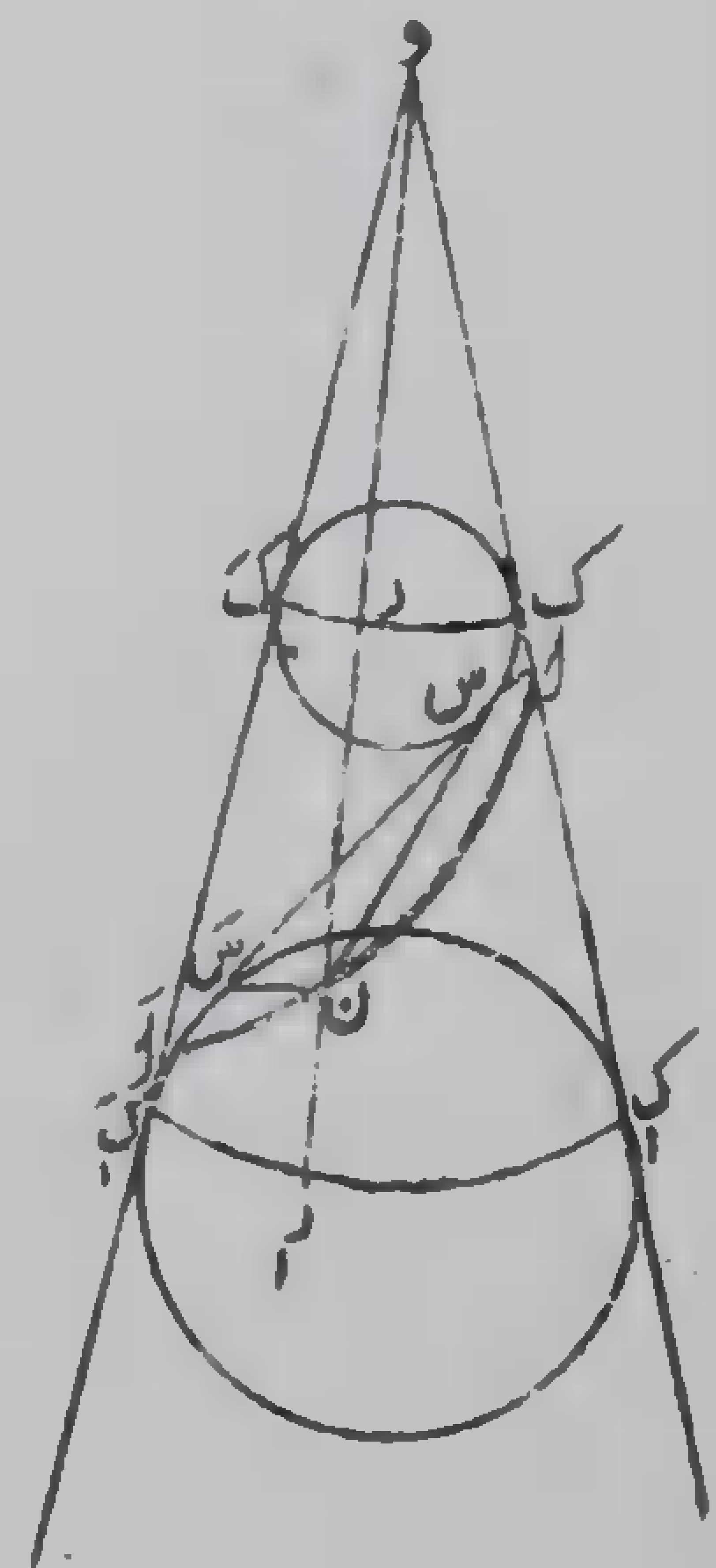
∴ س ا > ا لا [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

اور منحنی قطع زائد ہے

مسئلہ ۴

مخروط کی ناقص تراش کا محور اعظم ماسکی کروں کے اُس درمیانی فاصلے کے مساوی ہوتا ہے جو مخروط کے

ایک مولد پر ناپا جائے۔



فرض کرو کہ ان اَ تراش کا منحنی ہے، محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو خط مستقیم ااَ پر اور مخروط کو تولیدی خطوط ک اک۱، کَ اَکَ۱ پر ملتی ہے دو ماسکی کرے کھینچو جو مخروط کو دوائر ک رکَ، ک۱ ر۱ کَ۱ پر اور کاٹنے والی سطوح کو س اور سَ پر ملیں

منحنی ان اَ کے کسی نقطہ ن میں سے ایک تولیدی خط ر ن ر۱ کھینچو جو ماسکی کرون کو ر، ر۱ پر مس کرے

ن س، ن سَ کو ملاؤ، یہ بھی ماسکی

کروں کو مس کرینگے۔

تب س ن = ن ر کیونکہ یہ کرہ کے مماس ہیں

اور سَ ن = ن رؔ

∴ س ن + سَ ن = ن ر + ن رؔ = ر رؔ = ک کؔ

اس سے معلوم ہوا کہ تراش کا منحنی قطع ناقص ہے اس کے ماسکے س، سَ ہیں اور اس کا محور اعظم ک کؔ ہے

[قطع ناقص مسئلہ ۸]

مسئلہ ۵

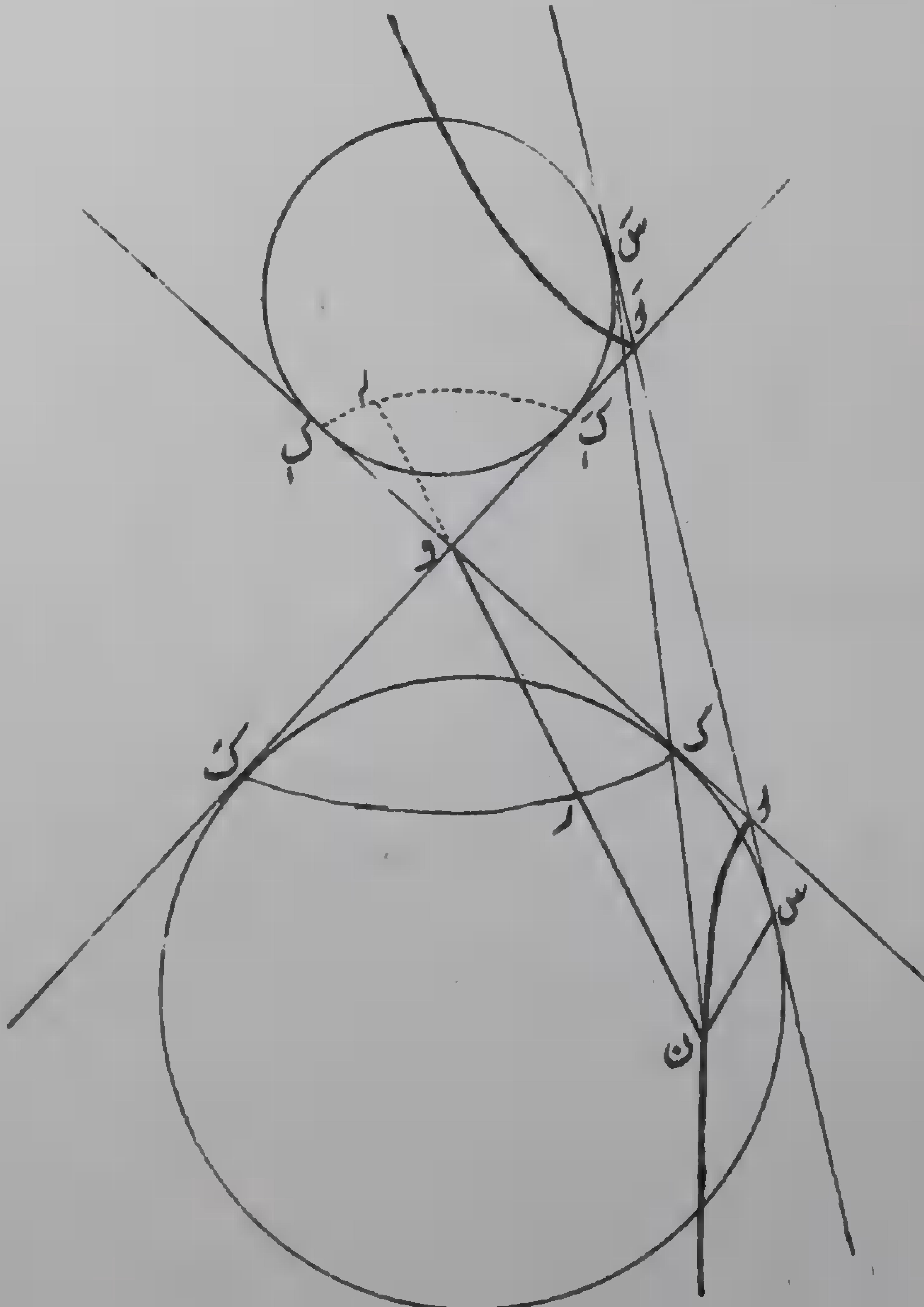
مخروط کی زائد تراش کا متقاطع محور ماسکی کروں کے اُس درمیانی فاصلے کے مساوی ہوتا ہے جو مخروط کے ایک تولیدی خط پر ناپا جائے

فرض کرو کہ ان اَ تراش کا منحنی ہے

محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ا اَ پر، اور مخروط کو مولّد خطوط ک ا کؔ، کَ اَ کَؔ پر ملتی ہے

دو ماسکی کرے کھینچو جو مخروط کو دوائر ک ر کَ، کؔ رؔ کَؔ پر اور کاٹنے والی سطح کو س اور سَ پر

مس کریں



منحنی ان اَ کے کسی نقطہ ن میں سے ایک مولّد خط ر ن رَ کھینچو جو ماسکی کروں کو ر، رَ پر مس کرے

ن س، ن سَ کو ملاؤ، یہ بھی ماسکی کرون کو مس کرینگے

تب س ن = ن ر کیونکہ یہ کرہ کے مماس ہیں

اور سَ ن = ن ر'

∴ سَ ن ـ س ن = ن ر' ـ ن ر

= ر ر' = ک ک'

اس لئے معلوم ہوا کہ تراشں کا منحنی قطع زائد ہے جس کے ماسکے س اور سَ ہیں اور اس کا متقاطع محور ک ک' ہے (قطع زائد مسئلہ ۷)

مشقی مثالیں مسائل ۴ اور ۵

ثابت کرو کہ امدادی دائرہ اس کرہ کی سطح پر واقع ہے جس کا قطر ماسکی کرون کے مرکزوں کا خط وصل ہے۔

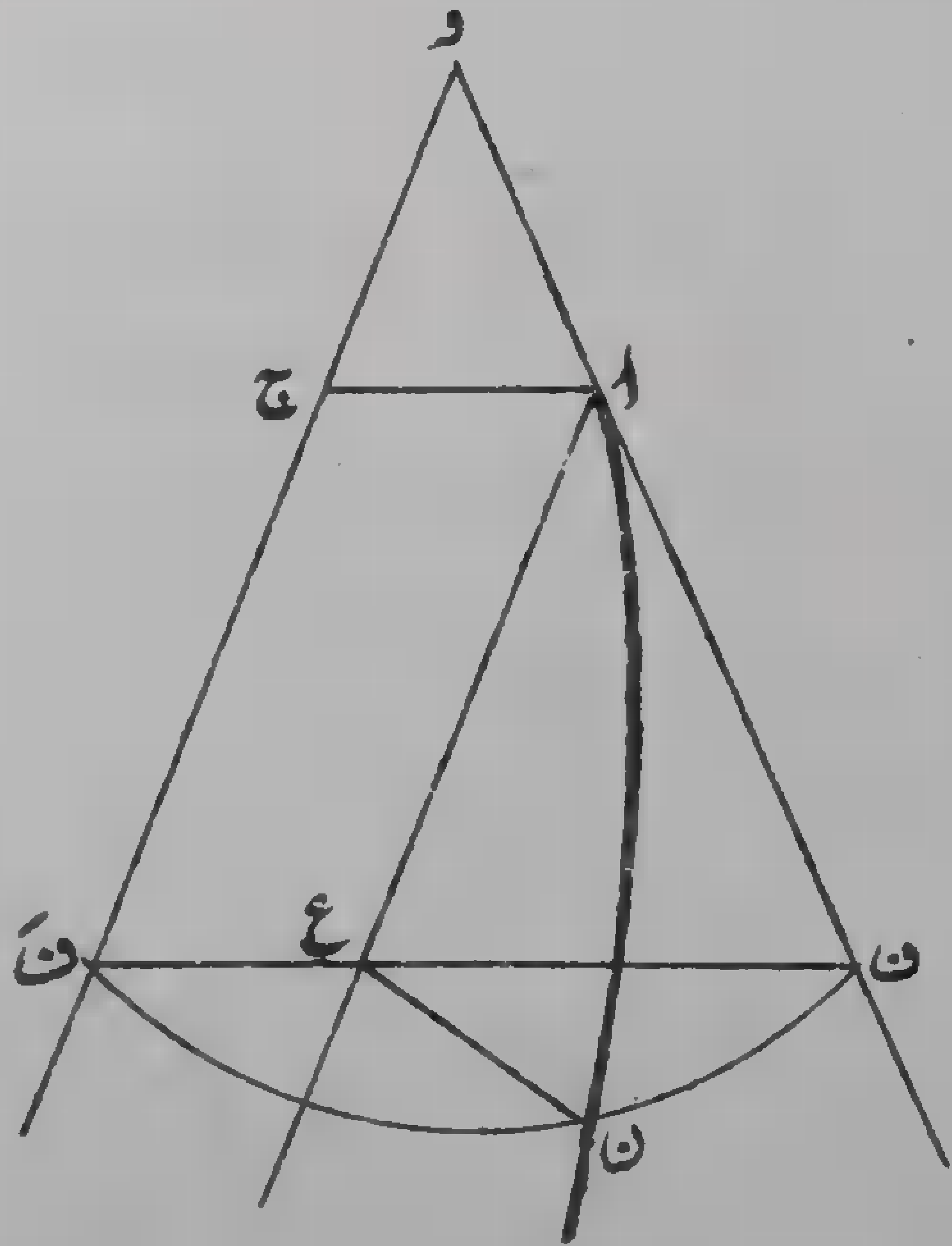
مسئلہ ۶

مخروط کی شلجمی تراشں کا وتر خاص مخروط اور شلجمی کے رؤس کے درمیانی فاصلے اور شلجمی کے راس میں سے گذرنے والی مدور تراشں کے قطر کا تیسرا متناسب ہوتا ہے

فرض کرو کہ ا ن تراشں کا منحنی ہے

محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور

فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط اع پر اور مخروط کو تولیدی خطوط واف، وج فَ پر ملتی ہے۔



منحنی پر کے کسی نقطہ ن میں سے ایک سطح فَ ن ف ع کھینچو جو مخروط کے محور پر عمود ہو اور کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ن ع پر، محوری سطح کو مستقیم خط ف ع فَ پر اور مخروط کو دائرہ ف ن فَ پر قطع کرے

اج کو ف فَ کے متوازی کھینچو

چونکہ سطوح ف ن فَ اور ا ت ع دونوں محوری سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ع محوری سطح پر عمود ہے

(اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹) اس لئے ن ع ' ف فَ اور
ا ع دونوں پر عمود ہے -
و ج ' ج ا کا تیسرا متناسب ۴ ا س لو' تشابہ
مثلثوں سے

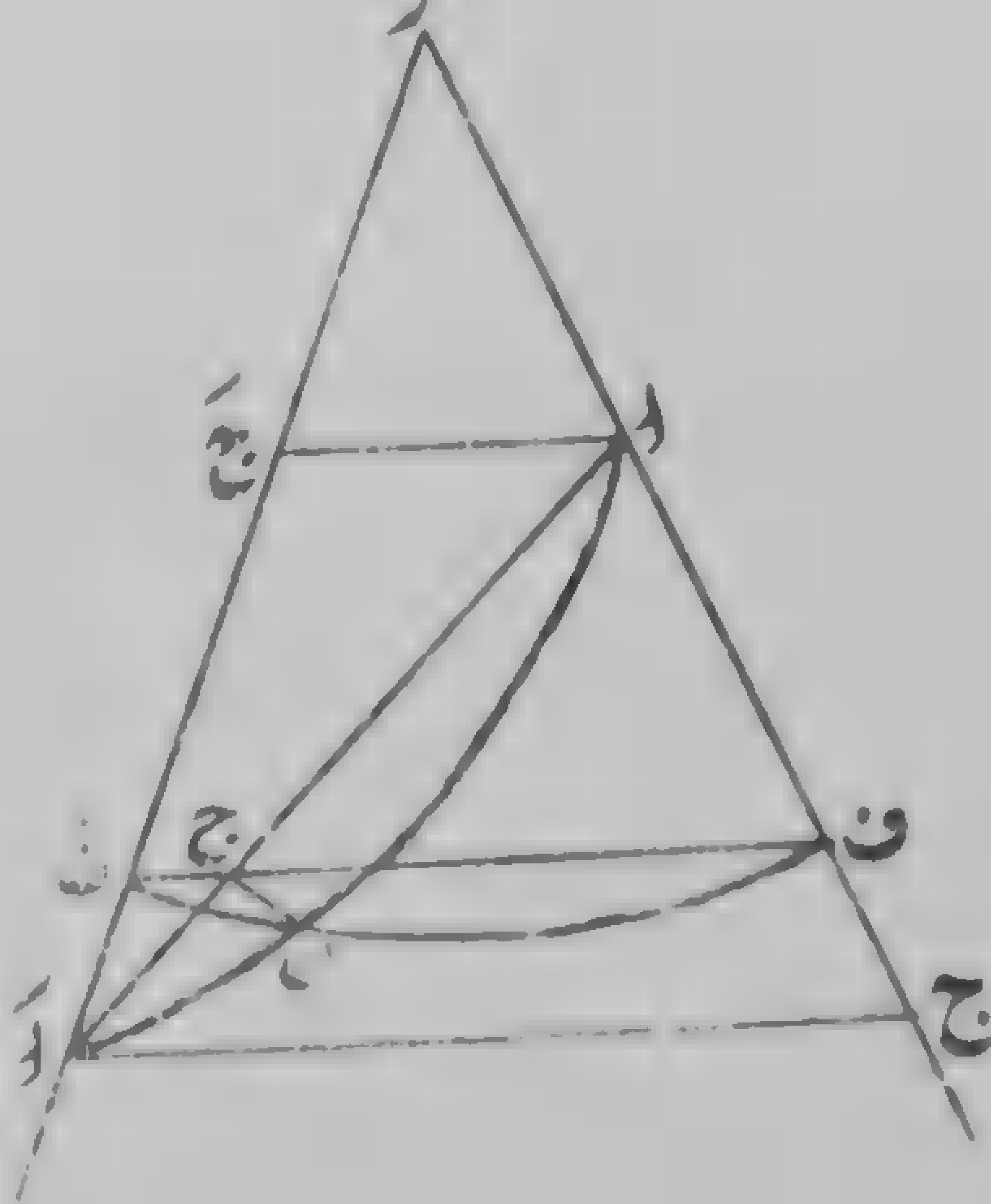
ا ع : ع ف = و ج : ج ا
= ج ا : ۴ ا س
∴ ۴ ا س × ا ع = ع ف × ج اَ
= ع ف × ع فَ
= ن ع^{۲}

اس لئے منحنی ان شلجمی ہے اور اس کا وتر خاص
۴ ا س ہے (شلجمی مسئلہ ۳)
اور ۴ ا س ' و ج اور ج ا کا تیسرا متناسب ہے

مسئلہ ۷

مخروط کی ناقص تراش کا محور اصغر مخروط کی اُن
مدور تراشوں کے اقطار کا وسط تناسب ہوتا ہے
جو محور اعظم کے سرون میں سے گذرتی ہیں
فرض کرو کہ تراش کا منحنی ا ن اَ ہے
محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور
فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ا اَ پر
اور مخروط کو تولیدی خطوط د ا ف ج ' د اَ فَ جَ پر

پر ملتی ہے



منحنی پر کے کسی نقطہ ن میں سے ایک سطح ف ن ف ع کھینچو جو مخروط کے محور پر عمود ہو، کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ن ع پر، محوری سطح کو مستقیم خط ف ع فَ پر اور مخروط کو دائرہ ف ن فَ پر ملے

اجَ، اج کو ف فَ کے متوازی کھینچو چونکہ سطوح ف ن فَ، ا ن اَ دونوں محوری سطح پر عمود ہیں

اس لئے ن ع محوری سطح پر عمود ہے [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹]

اس لئے ن ع، ف فَ اور ا اَ دونوں پر عمود ہے

متشابہ مثلثوں سے

ا ع : ع ف = ا اَ : اَ جَ

اور اَ ع : ع فَ = ا اَ : ا جَ

∴ ا ع × اَ ع : ع ف × ع فَ = ا اَ^۲ : اَ ج × ا جَ

∴ ا ع × ع اَ : ن ع^۲ = ا اَ^۲ : اَ ج × ا جَ

[اقلیدس م ۳ ش ۳۵]

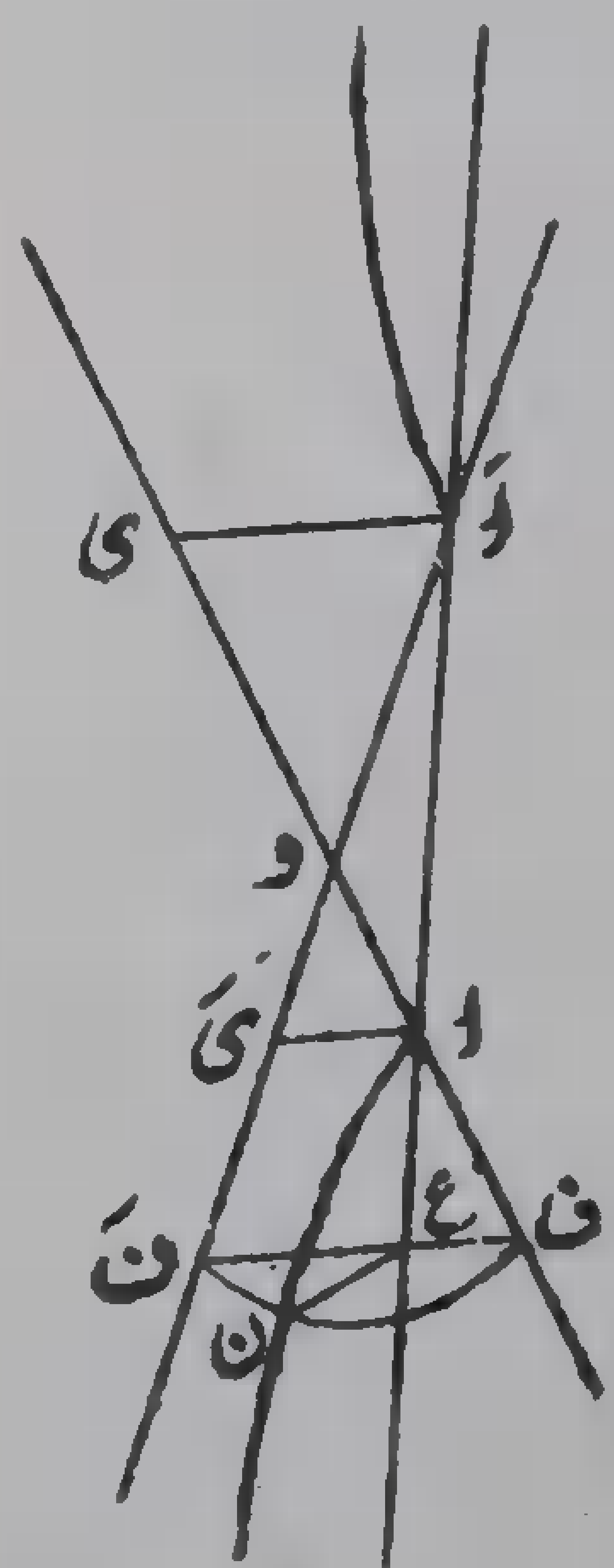
اس لئے تراش کا منحنی قطع ناقص ہے، اس کا محور اعظم ا اَ ہے اور محور اصغر ا جَ، اَ ج کا وسط تناسب ہے (قطع ناقص مسئلہ ۳)

مسئلہ ۸

مخروط کی ہذلولی تراش کا مزدوج محور اس کی اُن دو مدور تراشوں کے قطروں کا وسط تناسب ہوتا ہے جو قطع زائد کے راسوں میں سے گذریں

فرض کرو کہ تراش کے منحنی کی ایک شاخ کا راس ا ہے اور دوسری شاخ کا راس اَ ہے

محوری سطح کو کاغذ کی سطح پر منطبق خیال کرو اور فرض کرو کہ یہ کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ا اَ پر اور مخروط کو مولد خطوط س د ا ف، اَ د س فَ پر ملتی ہے



منحنی کے کسی نقطہ ن میں سے ایک ایسی سطح فَ ن ف ع کھینچو جو مخروط کے محور پر عمود ہو، کاٹنے والی سطح کو مستقیم خط ن ع پر، محوری سطح کو خط ف ع فَ پر اور مخروط کو دائرہ ف ن فَ پر ملے

ا یَ، اَ ی کو ف فَ کے متوازی کھینچو چونکہ سطح ف ع فَ، ا ن اَ دونوں محوری سطح پر عمود ہیں اس لئے ن ع محوری سطح پر عمود ہے (اقلیدس م ۱۱ ش ۱۹) اس لئے ن ل، ف فَ، ا اَ دونوں پر عمود ہے

متشابہ مثلثوں سے

ا ع : ع ف = ا اَ : اَ ی

اور اَ ع : ع فَ = ا اَ : ا یَ

∴ اع × اَع : ع ف × ع فَ = اا َ² : اَی × ای َ

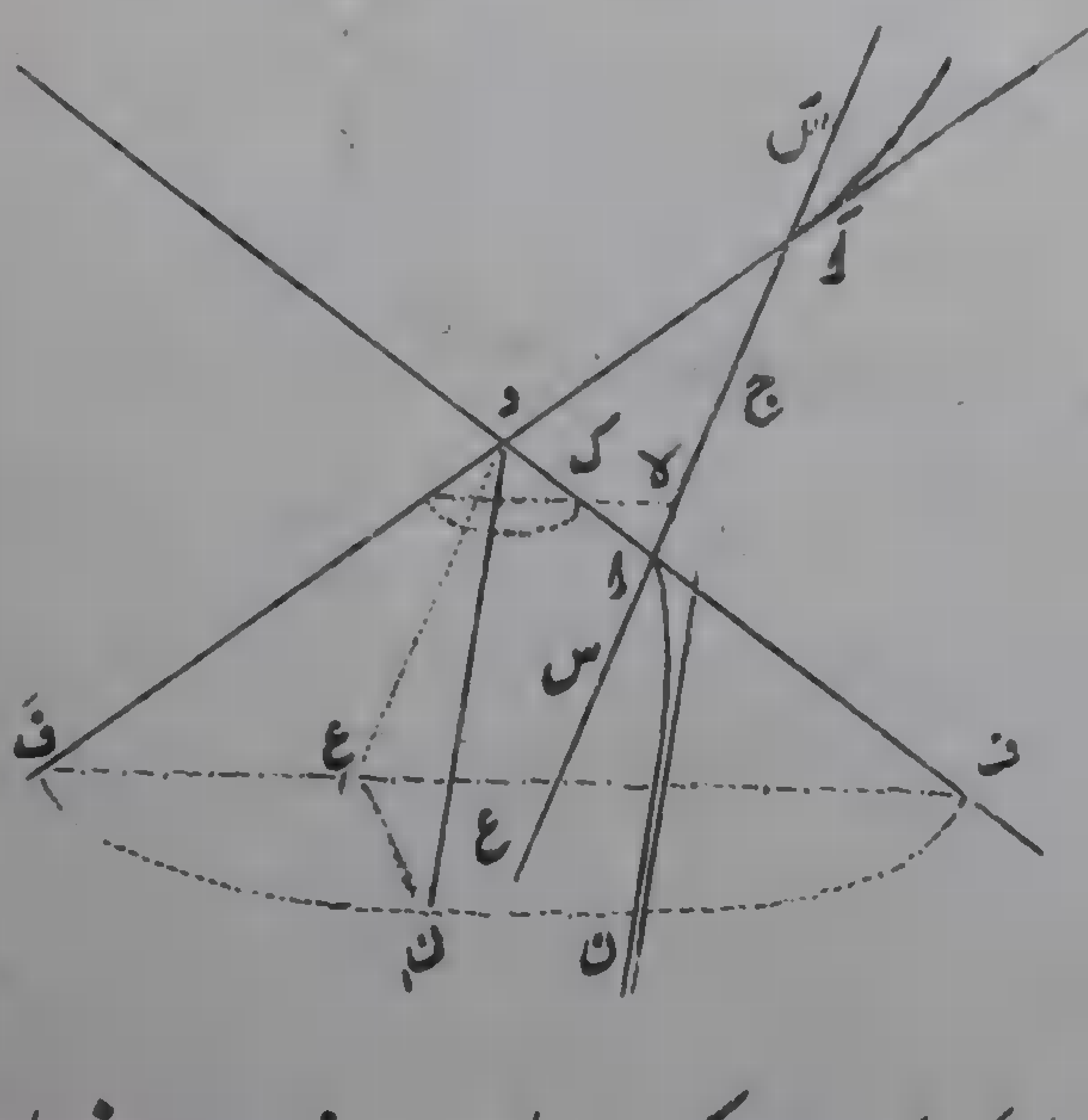
∴ اع × اَع : ن ع² = اا َ² : اَی × ای َ

[اقلیدس م ۳ ش ۳۵]

اسلئے تراش کا منحنی قطع زائد ہے جس کا متقاطع محور اا َ ہے اور مزدوج محور ای َ ' اَی کا وسط متناسب ہے [قطع زائد مسئلہ ۳]

مسئلہ ۹

مخروط کی ہذلولی تراش کے متقارب اُن دو مؤلد خطوں کے متوازی ہوتے ہیں جو مخروط کے راس میں سے گزرنے والی متوازی سطح میں واقع ہوں



محوری سطح کو کاغذ کی سطح پہ منطبق خیال کرو

فرض کرو کہ ن کوئی نقطہ قطع زائد پر ہے، ن ع معین ہے، س اور سَ ماسکے ہیں، ا اور اَ راس ہیں ج مرکز ہے اور لا اس مرتب کا پائیں ہے جو ماسکہ س کے مقابل ہے۔

فرض کرو کہ و ن، وَ نَ مُوَلّد خط محوری سطح میں ہیں اور سطح ف ن فَ ع محور پر عمود ہے

فرض کرو کہ ماسکی کرہ و ف کو ک پر مس کرتا ہے

تب ک لا، ف فَ کے متوازی ہوگا [مسئلہ ۲] اور س ا، ا ک کے مساوی ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

فرض کرو کہ و ن ع ایک سطح ہے جو کاٹنے والی سطح کے متوازی ہے اور جو مخروط کو مولد خط و ن پر، محوری سطح کو و ع پر اور سطح ف ن فَ کو ن ع پر ملتی ہے مثلث و ع ف، ا لا ک متشابہ ہیں کیونکہ و ع، ا لا کے متوازی ہے اور ع ف، لا ک کے

∴ و ع : و ف = ا لا : ا ک

= ا لا : ا س

∴ و ف = ل × و ع

لیکن مُوَلّد خط و ف، و ن باہم مساوی ہیں

∴ و ن$_1$ = ر × و ع$_1$

قطع زائد کی شکل مسئلہ ۴ میں

ج ر^2 = ج ا^2 + ا ر^2

= ج ا^2 + ج ب^2

= ج س^2

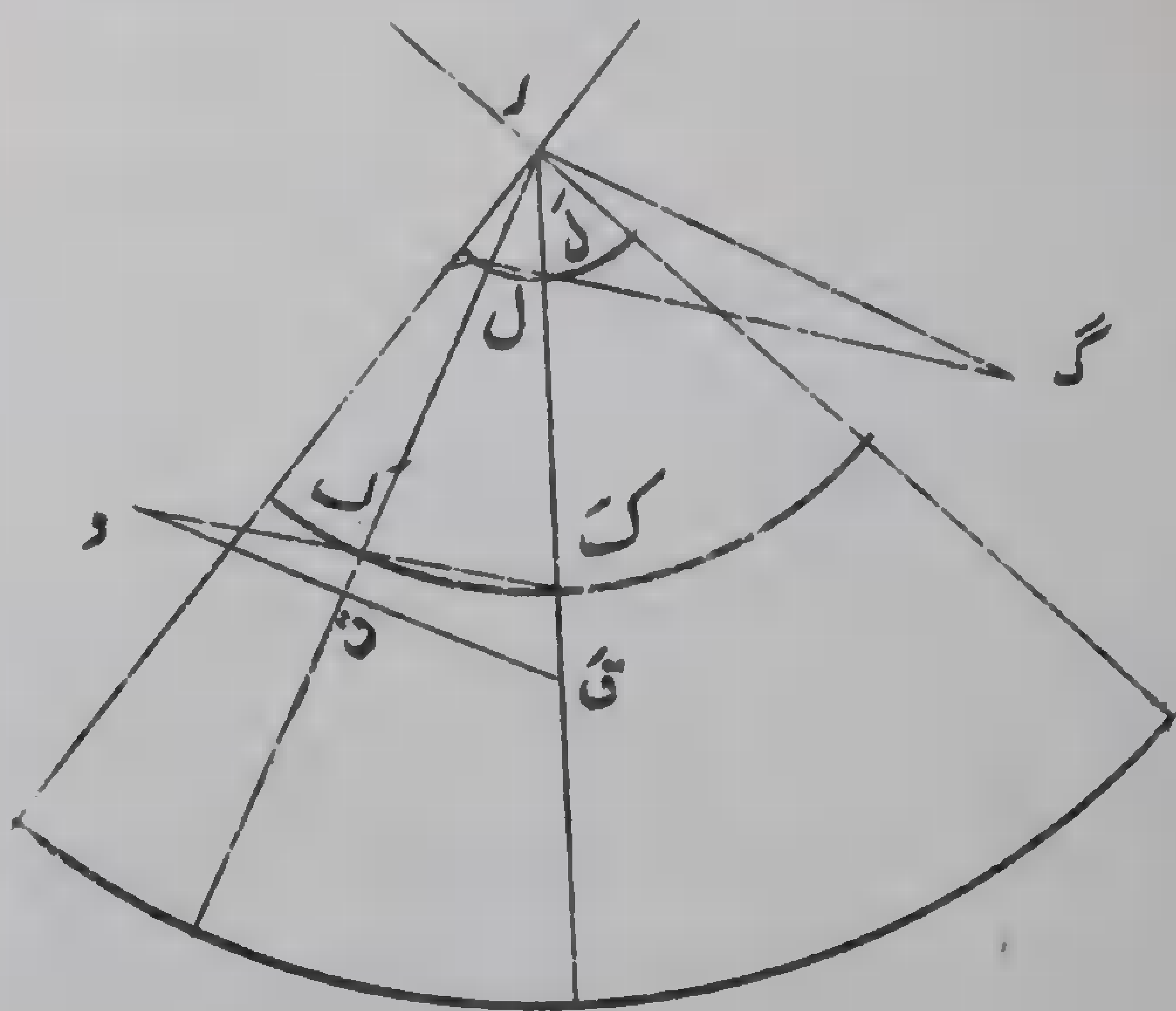
∴ ج ر = ج س = ر × ج ا

اسلئے ن$_1$ و ع$_1$ متقاربوں کے درمیانی زاویہ کا نصف ہے (ہذلولی مسئلہ ۴) لیکن و ع متقاطع محور کے متوازی ہے اس لئے و ن$_1$ ایک متقارب کے متوازی ہے۔

مسئلہ ۱۰

اگر کسی نقطہ میں سے دو مستقیم خط دو ثابت مستقیم خطوں کے متوازی کھینچے جائیں اور وہ مخروط کو قطع کریں تو ان خطوط کے حصوں کی حاصلضربوں کی نسبت اس نقطہ کے تمام مقامات کے لئے مستقل ہو گی۔

فرض کرو کہ و ق قَ، و ع عَ دو خط ہیں جو نقطہ و میں سے دو ثابت مستقیم خطوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور مخروط کو ق قَ، ع عَ پر قطع کرتے ہیں



راس ر میں سے رگ ، رح کو ثابت مستقیم خطوں
کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ایک ثابت سطح
کو جو مخروط کے محور پر عمود ہے گ اور ح پر
ملتے ہیں

نوٹ وع وعَ اور رح کو شکل میں نہیں دکھایا گیا۔
سب سے پہلے سطح وق × وقَ پر غور کرو
فرض کرو کہ گَ اور ح میں سے گذرنے والی ثابت
سطح رق قَ کو مستقیم خط گ لَ ل پر اور مخروط
کو دائرہ ل لَ پر ملتی ہے۔

نیز فرض کرو کہ نقطہ و میں سے ایک سطح
گ ح کے متوازی کھینچی گئی ہے اور وہ سطح
رق قَ کو وک کَ پر اور مخروط کو دائرہ ک کَ پر

ملتی ہے۔

مثلث وک ق ، گ ل ر ایک ہی سطح میں واقع ہیں اور ان کے اضلاع متوازی ہیں

∴ وق : وک = گ ر : گ ل

اسی طرح سے وقَ : وکَ = گ ر : گ لَ

∴ وق × وقَ : وک × وکَ = گ رؔ : گ ل × گ لَ

اب خواہ و کہیں واقع ہو گ ر مستقل ہے اور حاصلضرب گ ل × گ لَ بھی مستقل ہے [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

∴ وق × وقَ = لہ × وک × وکَ

اسی طرح سے وع × وعَ = مہ × وم × ومَ

جہاں لہ اور مہ مستقل مقداریں ہیں اور م ، مَ وہ نقاط ہیں جہاں رع ، رعَ دائرہ ک سکَ کو قطع کرتے ہیں

∴ وک × وکَ = وم × ومَ [اقلیدس م ۳ ش ۳۶]

∴ وق × وقَ : وع × وعَ = لہ : مہ

چند مشہور مسائل جو طالب علم کو ثابت کرنے چاہئیں۔

قطع مکافی

۱۔ اگر ن و ن′ مکافی کا ایک وتر ہو جو محور کو و پر
ملے اور ن ل، ن′ ل′ معین ہوں تو ثابت کرو کہ
ا ل × ا ل′ = ا و² (دیکھو مسئلہ ۳)

۲۔ اگر اُس مثلث کے گرد جو مکافی کے تین مماس
کھینچنے سے بنتا ہے ایک۔دائرہ بنایا جائے تو ثابت
کرو کہ وہ دائرہ ماسکہ میں سے گزریگا۔ (دیکھو مسئلہ ۱۳)

۳۔ اگر و ق، و ق′ دو مماس ہوں اور و ص
قطر ہو تو ثابت کرو کہ زاویہ ق و ص زاویہ ق′ و س
کے مساوی ہے۔ (دیکھو مسئلہ ۷، ۱۳)

۴۔ اگر ن اُس قطر کا سرا ہو جو وتر ق ق′ کی تنصیف
کرتا ہے اور ر ایک اور قطر کا سرا ہو جو ق ق′ کو
م پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ

ق م × م ق′ = ۴ س ن × ر م

(دیکھو مسئلہ ۱۶)

۵۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ ر میں سے گزرنے والا قطر وتر ق قَ کو نقطہ ل اور مماس ق م کو نقطہ م پر ملے تو ثابت کرو کہ

م ر : د ل = ق ل : ل قَ

(دیکھو مسائل ۱۶، ۱۷ اور ثبوت مسئلہ ۱۹)

۶۔ اگر و ن مکافی کو ن پر مس کرے اور و ق ر مکافی کو ق ر پر ملے اور ن میں سے گزرنے والا قطر وتر ق ر کو ی پر ملے تو ثابت کرو کہ۔

و ی^2 = و ق × و ر {دیکھو ۱۹}

۷۔ اگر ایک دائرہ مکافی کو چار نقطوں ا، ب، ج، د پر ملے تو ثابت کرو کہ مشترک وتر ا ب، ج د محور سے مساوی زاوئے بنائینگے۔ {دیکھو مسئلہ ۱۹}

۸۔ اگر ایک دائرہ مکافی کو چار نقطوں پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ان چار نقطوں کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوگا {دیکھو مسئلہ ۱۵، ۱۹}

۹۔ اگر تین نقطوں ن، ق، ر پر کے عماد ایک ہی نقطہ پر ملیں تو ن، ق، ر کے معینوں کا مجموعہ صفر ہوگا اور مثلث ن ق ر کا دائرہ بیرونی (یعنی ن، ق، ر میں سے گزرنے والا دائرہ) راس میں سے گزریگا۔ (بذریعہ ہندسہ تحلیلیہ)

۱۰۔ اگر و ق، و قَ مکافی کے دو مماس ہوں تو وتر ق قَ مکافی سے ایک ایسا حصہ کاٹیگا جس کا رقبہ مثلث و ق قَ

کا $\frac{۲}{۳}$ ہوگا (دیکھو مسئلہ ۱۶)

مخروطی تراشیں

۱- مخروطی تراش کو کوئی خط دو نقطوں سے زیادہ میں نہیں مل سکتا [مسئلہ ۲]

۲- اگر ایک دائرہ مخروطی تراش کو چار نقطوں پر ملے تو ان میں سے کسی دو نقطوں کو ملانے والا خط محور سے وہی زاویہ بنائیگا جو باقی دو نقطوں کو ملانے والا خط بناتا ہے۔ [قطع ناقص مسئلہ ۴۳]

۳- ایک مخروطی تراش کا ماسکہ، مرتب، خروج المرکز تینوں معلوم ہیں، معلوم کرو کہ ایک ایسا خط مستقیم جو محور کے متوازی ہو تراش کو کہاں ملیگا۔

[عمل- فرض کرو کہ خط مرتب کو م پر ملتا ہے، لا کو مرکز اور ر × س لا کو نصف قطر مانکر ایک دائرہ کھینچو۔ س م کو ملاؤ اور فرض کرو کہ یہ دائرہ کو ن، نَ پر ملتا ہے، س ن، س نَ کو بالترتیب لا ن، لا نَ کے متوازی کھینچو، ن نَ نقاط مطلوبہ ہونگے۔]

۴- نصف وتر خاص کسی ماسکی وتر کے دو حصوں کے درمیان اوسط موسیقی ہوتا ہے۔

$$\frac{۱}{س ن} + \frac{۱}{س نَ} = \frac{۲}{س خ}$$

س ن : س نَ = س ل : س لَ

= ل لا۔ س لا : س لَا۔ لَ لَا

= س ن۔ س خ : س خَ۔ س نَ

۵۔ ایک ماسکی وتر کے حصوں کا حاصل ضرب ایسے بدلتا ہے جیسے وتر کا طول۔

۶۔ کسی دو متقاطع وتروں کے حصوں کے حاصل ضرب (سطوح) اُن ماسکی وتروں کے طولوں کے متناسب ہوتے ہیں جو انکے متوازی ہوں [قطع ناقص ۳۴]

۷۔ قطع زائد یا قطع ناقص کے اُن مماسات کے نقاط تقاطع جو ایک دُوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں ایک ثابت دائرہ پر واقع ہوتے ہیں جسکو **مرتب دائرہ** کہتے ہیں۔ [قطع ناقص مسئلہ ۱۴]

۸۔ ثابت کرو کہ

ن گ : ج د = ج ب : ج ا

اور ن گَ : ج د = ج ا : ج ب

(قطع ناقص ۱۸ اور ۲۲)

۹۔ ثابت کرو کہ

س ن × سَ ن = ج دٗ = ن گ × ن گَ

(قطع ناقص ۱۳ اور ۱۸)

۱۰۔ اگر کوئی ماسکی وتر ق قَ نصف قطر ج د کے متوازی ہو تو

ق قَ × ج ا = ۲ ج دٗ

۱۱۔ اگر مخروطی تراش کا کوئی قطر مرتب کو مے پر ملے تو مے س اُن سب وتروں پر عمود ہوگا جنکی قطر مذکور

تنصیف کرتا ہے۔

{قطع ناقص ۱۱ اور ۲۵}

۱۲۔ اگر وق ، وقَ ایک مخروطی تراش کے مماس ہوں اور قِ قَ مرتب کو ک پر ملے تو ثابت کرو کہ وس ک زاویہ قائمہ ہے {قطع ناقص ۲۲}

۱۳۔ اگر ن پر کا مماس کسی دو مزدوج قطروں کو م اور م، پر ملے تو ثابت کرو کہ ن م × ن م، = ج د²

{قطع ناقص ۲۸}

۱۴۔ ثابت کرو کہ عماد ن گ کا ظل ماسکی فاصلہ س ن پر نصف وتر خاص کے مساوی ہوتا ہے۔ {قطع ناقص ۱۲}

۱۵۔ اگر وق ، وقَ قطع ناقص کے دو مماس ہوں اور ایک مستقیم خط نقطہ و میں سے گذرے اور منحنی کو نقاط ک اور م پر اور قِ قَ کو ل پر ملے تو خط وک ل م نسبت موسیقی میں تقسیم ہوگا یعنی۔

$$\frac{2}{\text{ول}} = \frac{1}{\text{وک}} + \frac{1}{\text{وم}}$$ (تظلیل)

۱۶۔ اگر کسی تراش مخروطی کے نصف قطر ج ن ، ج نَ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\text{ج ن}^2} + \frac{1}{\text{ج نَ}^2}$$ ایک مقدار مستقل ہے (مرتب دائرہ قطع ناقص ۳۲)

۱۷۔ اگر ایک مستقیم خط ایک اور مستقیم خط کے قطب میں سے

گزرے تو ثابت کرو کہ دوسرا مستقیم خط پہلے خط کے قطب میں سے گزرتا ہے (تظلیل)

اسطوانہ اور مخروط کی تراشیں

۱۔ ثابت کرو کہ مستوی تراش کے کسی نقطہ پر کا مماس ماسکی فاصلوں اور نیز تولیدی خط سے مساوی زاوئے بناتا ہے۔

۲۔ ثابت کرو کہ تراش کے محور اصغر کا نصف ماسکی کرون کے نصف قطروں کے درمیان وسط تناسب ہوتا ہے۔

۳۔ ثابت کرو کہ مخروط کی تمام تراشوں کیلئے وتر خاص ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو راس مخروط سے کاٹنے والی سطح پر نکالا جائے۔

۴۔ ثابت کرو کہ ایک قائم مستدیر اسطوانہ سے ایک ایسا قطع ناقص کاٹا جاسکتا ہے۔ جس کی خروج المرکز نسبت کچھ ہی ہو اور پھر قائم الزاویہ تظلیل سے اِس قطع ناقص کا ظل دائرہ ہو سکتا ہے۔

{دیکھو ضمیمہ}

عملیات

شلجمی

۱- ق س ق شلجمی کا ایک ماسکی وتر ہے جو ن پر کے مماس کے متوازی کھینچا گیا ہے، ن گ عماد ہے، ثابت کرو کہ

ق س × س ق = ن گ^۲

۲- دو شلجمی خطوط کا ایک مشترک ماسکہ ہے اور انکے محوروں کی سمت ایک ہی ہے، ماسکہ میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو انکو چار نقطوں پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ان نقطوں پر مماس کھینچے جائیں تو انکے تقاطع سے ایک مستطیل شکل پیدا ہوگی جس کا ایک قطر ماسکہ میں سے گذریگا

۳- ایک شلجمی کا مرتب اور منحنی پر کے دو نقاط معلوم ہیں ماسکہ دریافت کرو، نیز نقاط معلومہ کو جو خط وصل کرتا ہے اسکے متوازی منحنی کا ایک مماس کھینچو۔

۴- ن ل ق شلجمی کا دگنا معین ہے اور ا ن ق مثلث متساوی الاضلاع ہے، ثابت کرو کہ ا ل = وتر خاص کا تین گنا

۵- ثابت کرو کہ شلجمی کے کسی دو مماسات کا خارجی زاویہ

اس زاویہ کا نصف ہوتا ہے جو وتر تماس کے محاذی
ماسکہ پر بنے۔

۶۔ وق، وقَ شلجمی کے مماس ہیں، وتر ق قَ محور
کو نقطہ د پر ملتا ہے، محور پر عمود و ل نکالا گیا ہے
ثابت کرو کہ ا ل = ا د

۷۔ اگر شلجمی کے کسی عماد ن گ کو اسطرح تقسیم کیا جائے
کہ ن ق : ق گ ایک مستقل نسبت ہو تو ثابت
کرو کہ ق کا طریق شلجمی ہے

۸۔ دو شلجمی خطوط کا مرتب ایک ہی ہے، ثابت کرو کہ
انکے مشترک مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ
بناتے ہیں۔

۹۔ شلجمی کا مرتب معلوم ہے، نیز منحنی کے دو مماس
دئے ہوئے ہیں، شلجمی کا ماسکہ اور مماسات کے نقاط
تماس دریافت کرو۔

۱۰۔ شلجمی کا ایک قطر ایک وتر کی تنصیف کرتا ہے، اگر
وتر اُس خط کا چار گنا ہو جو وتر کے نقطہ وسطی اور قطر کے
سرے کو ملاتا ہے تو ثابت کرو کہ وتر ماسکہ میں سے گذرتا
ہے۔

۱۱۔ اگر شلجمی کے مماس ون، ونَ، ا پر کے مماس
کو ما اور ماَ پر ملیں اور ن نَ محور کو ک پر
قطع کرے تو ثابت کرو کہ ک ما، ک ماَ مماسات

دن، دنَ کے متوازی ہیں [یہ مسئلہ کسی ایک قطر اور اسکے سرے پر کے مماس کے لئے درست ہے ضروری نہیں کہ قطر کی بجائے محور ہو]

۱۲- اگر شلجمی کے کسی نقطہ ن پر کا مماس ن ما راس پر کے مماس کو ما پر ملے اور ن ما کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا جائے جو محور کو ک اور کَ پر ملے تو ثابت کرو کہ ن ک، ن کَ ممدودہ منحنی کے عماد ہیں۔

۱۳- شلجمی کے وتروں اب، ج د کو خارج کیا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو نقطہ و پر ملتے ہیں، اب، ج د پر نقطے ع اور ف ایسے ہیں کہ

$$\text{وع}^2 = \text{وا} \times \text{وب}،\ \text{وف}^2 = \text{وج} \times \text{ود}$$ ثابت کرو کہ

ع ف محور کے متوازی ہے۔

۱۴- اگر ایک شلجمی ایک مثلث کے تین ضلعوں کو مس کرے تو اس کا مرتب مثلث کے مرکز عمودی میں سے گزریگا۔

۱۵- اگر ایک دائرہ پر کے چار نقطے معلوم ہوں اور دو شلجمی خطوط ان میں سے گزریں تو ثابت کرو کہ انکے محور ایک دوسرے کو نقطوں کے مرکز ہندسی پر قطع کریں گے۔

۱۶- ق وقَ، ر دَ شلجمی کے دو وتر ہیں ر ورَ کو دونوں طرف اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ ق، قَ پر کے

مماسات کو ر، رَ پر ملتا ہے، اگر ر ر = رَ رَ ثابت کرو کہ
و ر = و رَ

ہلیلجی

۱۷- ن و ق ایک زاویہ حادہ ہے جس کے اضلاع ہلیلجی کے ماسکی وتر ن ق کے سروں پر مماس ہیں، دونوں ماسکے دریافت کرو۔

۱۸- ایک ذوار بعۃ الاضلاع ایک تراش مخروطی کے گرد بنی ہوئی ہے اور شکل کے قطر ایک دوسرے کو ماسکہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں۔

۱۹- معلوم کرو کہ قطع ناقص کے دو ایسے مزدوج قطر کس طرح کھینچے جائیں جو ایک دوسرے سے ایک زاویہ معلومہ بنائیں۔

۲۰- قطع ناقص اور اسکے امدادی دائرہ پر کے نظیری نقاط ن اور ق ہیں، س قطع ناقص کا ماسکہ ہے، ثابت کرو کہ س ن = اُس عمود کے جو س سے ق پر کے مماس (دائرہ) پر نکالا جائے۔

۲۱- ایک قطع ناقص میں ن پر کا عماد محور اصغر کو گ پر ملتا ہے، نقطہ ن سے اسی محور پر معین ن ل کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ

ج گ: ج ل = ج س: ج ب²

۲۲- ایک مخروطی تراش کا ماسکہ س ہے اور محور کے ثابت نقطہ سے منحنی کے نقطہ ن پر کے مماس پر عمود نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس عمود اور س ن کا نقطہ تقاطع ایک ثابت دائرہ پر واقع ہے۔

۲۳ - ایک دئے ہوئے نقطہ سے عماد کھینچو۔

(۱) قطع مکافی کے محور پر (۲) قطع ناقص کے محور اعظم پر

۲۴- دو قطع ناقص خطوط کا مشترک ماسکہ س ہے، انکے ایک مشترک مماس کے کسی نقطہ ن سے قطع ناقص خطوں کے مماس کھینچے گئے ہیں جو ایک دوسرے مشترک مماس کو ق، ر پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ زاویہ ق س ر مستقل ہے۔

۲۵- تراش مخروطی کی ایک قوس دی ہوئی ہے، یہ کسطرح معلوم کیا جائے کہ اس کی شکل مکافی ہے یا قطع ناقص یا قطع زائد۔

۲۶- ایک قطع ناقص کے دو مماس معلوم ہیں اور ایک ماسکہ دیا ہوا ہے، مرکز کا طریق دریافت کرو

۲۷ - ایک تراش مخروطی کا مماس کھینچا گیا ہے اور وہ مرتبات کو ل، م پر ملتا ہے، اگر س، سَ ماسکے ہوں اور ل س اور م سَ نقطہ ن پر ملیں تو ثابت کرو کہ ل ن = م ن

۲۸- ن ق ایک تراش مخروطی کا دگنا معین ہے اور
جو مستقیم خط ن کو مرتب کے پایئن سے ملاتا ہے وہ منحنی
کو ر پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ ق ر ماسکہ میں سے گزرتا ہے،
۲۹- قطع ناقص کے دو وتروں ا ن، ب ق کو خارج
کیا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو و پر ملتے ہیں، انکے
متوازی دو اور وتر ق ج، ن د کھینچے گئے ہیں جو ایک
دوسرے کو ر پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلث ا و ب،
ج ر د متشابہ ہیں اور ا ب، ج د کے متوازی ہے۔
۳۰- اگر دو مخروطی تراشوں کا ایک مشترک ماسکہ ہو اور
وہ اس طرح واقع ہوں کہ صرف دو نقطوں پر ایک
دوسرے کو قطع کریں تو اس کا مشترک وتر ان کے متعلقہ
مرتبات کے نقطہ تقاطع میں سے گزرے گا
۳۱- متوازی الاضلاع شکلوں کا ایک نظام ایک
ہلیلجی کے اندر بنایا گیا ہے، ان شکلوں کے اضلاع مساوی
مزدوج قطروں کے متوازی ہیں، ثابت کرو کہ ان کے
اضلاع کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے
۳۲- ثابت کرو کہ ذیل کے عمل سے کسی مخروطی تراش
کا عماد کھینچ سکتا ہے۔ معین ن ل کھینچو، محور پر ل ک،
ل م، میں سے ہر ایک کو ل ن کے مساوی کاٹو،
ن ک، ن م کو اتنا خارج کرو کہ وہ منحنی کو دوبارہ
ق، قَ پر ملیں، ق قَ کی تنصیف ص پر کرو۔ تب

ن ص، ن پر کا عماد ہوگا

۳۳- ایک ذوار بعۃ الاضلاع ا ب ج د کے اندر ایک قطع ناقص بنایا گیا ہے، س اسکا ماسکہ ہے، ثابت کرو کہ زاوئے ا س ب اور ج س د ملکر زوایا ب س ج اور د س ا کے برابر ہیں۔

۳۴- اگر ماسکون سے قطع ناقص کے کسی نقطہ پر کے عماد پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کی باہمی نسبت وہی ہوگی جو اُن عموودوں کی ہے جو ماسکون سے اُسی نقطہ پر کے مماس پر نکالے جائیں

۳۵- ایک مخروطی تراش کے دو مماس دئے ہوئے ہیں اور اس کا مرکز بھی معلوم ہے ثابت کرو کہ اس کے ماسکون کا طریق قایم ہذولی ہے

۳۶- ہلیلجی کے نقطہ ن کا معین ن ل ہے، اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ وتر خاص کے ایک سرے پر کے مماس کو ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ق ل = س ن

۳۷- ایک قائم مخروط کی ہلیلجی تراش کا ظل ایک ایسے سطح مستوی پر اتارا گیا ہے جو محور مخروط پر عمود ہے، ثابت کرو کہ تظلیل کے منحنی کا ماسکہ وہ نقطہ ہے جہاں مخروط کا محور سطح تظلیل کو ملتا ہے۔

۳۸- قطع ناقص کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ و ہے، اس نقطہ سے قطع ناقص کے دو مماس د ن، و ق

کھینچے گئے ہیں، ن ج نَ قطع ناقص کا ایک قطر ہے، ثابت کرو کہ ق نَ اسکے میں سے گزرتا ہے۔

۳۹- اگر کسی تراش مخروطی میں ن ق، ن قَ ایسے وتر ہوں جو محور سے مساوی زاوئے بنائیں تو ثابت کرو کہ ن ق قَ کا بیرونی دائرہ (گرد بنا ہوا دائرہ) تراش کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے۔

۴۰- اگر ایک ہلیلجی میں دو ایسی اشکال ذو اربعۃالاضلاع بنائی جائیں جن میں سے ایک کے تین ضلعے دوسری کے تین ضلعوں کے متوازی ہوں تو ان کے چوتھے ضلع بھی متوازی ہونگے۔ اسلئے معلوم کرو کہ متوازی رولر (پٹری) کے ذریعہ قطع ناقص کے کسی نقطہ پر مماس کس طرح کھینچ سکتا ہے [تظلیل]

۴۱- اگر ر ن قطع ناقص کے نقطہ ن پر کا مماس ہے اور س ر ن ایک مستقل زاویہ ہے ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک دائرہ ہے۔

۴۲- قطع ناقص کے نقاط ق، قَ پر مماس و ق، و قَ کھینچے گئے ہیں نیز ق گ، قَ گَ عماد ہیں جو محور اعظم کو نقاط گ، گَ پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ مثلثیں و ق گ، و قَ گَ متشابہ ہیں

۴۳- مماسات و ق، و قَ کے محاذی اُس معین کے پائین پر مساوی زاوئے بنتے ہیں جو و میں سے گزرتا ہے۔

۴۴ - ایک قطع ناقص ایک مثلث کے اضلاع کو انکے وسطی نقاط پر مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ قطع ناقص کا مرکز مثلث کا مرکز ثقل ہے
[تطلیل]

مکافی

۴۵ - مکافی کے ایک مماس پر راس اور ماسکہ سے عمود ا ر، س مآ نکالے گئے ہیں ثابت کرو کہ
س مآ^۲ = س ما × ا ر + س ا^۲
[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۴۶ - مکافی پر ایک نقطہ ن ہے، اور ن پر عمود س ر نکالا گیا ہے اور یہ راس پر کے مماس کو ر پر ملتا ہے
ثابت کرو کہ ا ر، ن ل کا ۱/۴ ہے جہاں ن ل نقطہ ن سے محور پر عمود نکالا گیا ہے
[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۴۷ - ایک مکافی ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعوں کو نقاط ا، ب، ج پر مس کرتا ہے اور یہ نقاط بالترتیب ا، ب، ج کے متقابل کے اضلاع پر واقع ہیں، ثابت کرو کہ ا ا، ب ب، ج ج مکافی کے ماسکہ پر ملتے ہیں
[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۷ء]

۴۸۔ ایک شلجمی ایک اور مساوی شلجمی کے گرد پھرتا ہے، ابتدا میں دونوں کے راس ایکدوسرے پر منطبق تھے، ثابت کرو کہ متحرک شلجمی کے راس پر کا مماس ہمیشہ ایک ثابت دائرہ کو مس کرتا ہے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۷ء]

۴۹۔ مکافی پر دو نقاط ن، ق ہیں، ان کو مرکز مان کر ایسے دائرے کھینچے گئے ہیں جو ماسکہ میں سے گذرتے ہیں اور ایک دوسرے کو س اور ر پر علی القوائم کاٹتے ہیں، اگر ق اور ان دائروں کے نقاط تقاطع کو ملانے والے خطوط مرتب کو م اور مَ پر کاٹیں تو ثابت کرو کہ زاویہ م ن مَ زاویہ ر ن س کا نصف ہے

[پمبروک کالج ۱۸۸۷ء]

۵۰۔ ایک مکافی میں زاویہ اس ن چار تہائی قائمہ کے برابر ہے، ثابت کرو کہ ن پر کا معین اور وتر خاص کے ایک سرے پر کا عماد ایکدوسرے کو محور پر قطع کرتے ہیں

[ماڈلن کالج ۱۸۸۸ء]

۵۱۔ مکافی کے دو مماسوں کے مقام معلوم ہیں اور ان کے نقاط تماس بھی دے ہوئے ہیں، منحنی کا ماسکہ اور مرتب معلوم کرو [کوین کالج ۱۸۸۸ء]

۵۲- ایک شلجمی کے نقاط ن، ق پر مماس و ن، و ق کھینچے گئے ہیں، س ماسکہ ہے، اگر و س، و ن ق میں سے گذرنیوالے دائرہ کو دوبارہ م پر ملے تو ثابت کرو کہ س، و م کی تنصیف کرتا ہے

[کوین کالج ۱۸۸۸ء]

۵۳- نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے، اگر مکافی کے ایک نقطہ سے ایک ایسے دائرہ کا مماس کھینچا جائے جس کا مرکز گ اور نصف قطر گ ن ہو تو ثابت کرو کہ یہ مماس اُس عمود کے برابر ہوگا جو اُسی نقطہ سے ن کے معین پر نکالا جائے

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۵۴- مثلث ا ب ج کے خارجی زاویہ ا کے منصف پر ایک ثابت نقطہ ث ہے ث ا کو وتر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو ا ب، ا ج کو ن اور ق پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق ایک ایسے شلجمی کو لف کرتا ہے جس کا ماسکہ ث ہے اور جس کے راس پر کا مماس اُن عمودون کے پائیں کو ملانے والا مستقیم خط ہے جو نقطہ ث سے ا ب اور ا ج پر نکالے جائین

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۵۵- شلجمی کے راس پر مماس کھینچا گیا ہے اور اس پر دو نقطے ما اور ماَ ایسے لئے گئے ہیں کہ س ما × س ماَ ایک مستقل مقدار ہے، شلجمی کے باقی دو مماس جو ما اور ماَ میں سے گذرتے ہیں وہ نقطہ ق پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے

[جون کالج ۱۸۸۹ء]

۵۶- ایک دائرہ ایک شلجمی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور ماسکہ س میں سے گذرتا ہے اگر شلجمی کا راس ا ہو اور دائرہ محور کو دوبارہ ک پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ا ک، ن کے فصلہ کا تین گنا ہے

[سلون کالج ۱۸۸۸ء]

۵۷- شلجمی کے ایک مماس پر دو نقطے ن، ق لئے گئے ہیں جن کے فاصلے شلجمی کے ماسکہ سے مساوی ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ق میں سے گزرنے والے باقی دو مماس ایک دوسرے کو محور پر ملینگے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۵۸- شلجمی پر تین نقطے ن، ق، ر ہیں، وتر ن ر نقطہ ق میں سے گذرنے والے قطر کو

س پر ملتا ہے، وتر ن ق، ر میں سے گذرنیوالے قطر کو ط پر ملتا ہے ثابت کرو کہ س ط، ن پر کے مماس کے متوازی ہے

[کلیر ۱۸۸۷ء]

۵۹- ایک شلجمی کا راس ا، ماسکہ س، اور نصف وتر خاص س خ ہے ا پر کا مماس خ میں سے گذرنیوالے قطر کو نقطہ و پر قطع کرتا ہے، نقطہ و میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جس پر دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ن میں سے گذرنے والے مماسات کا وتر تماس ق میں سے گذرنے والے مماسات کے وتر تماس کو زاویہ و ا س کے منصّف پر قطع کرتا ہے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۶۰- ایک شلجمی کا راس ا اور ماسکہ س ہے، شلجمی کے محور پر ایک بیرونی نقطہ ن لیا گیا ہے، اگر ن س کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور ا پر کا مماس اس دائرہ کو ق اور ر پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن ق اور ن ر شلجمی کو مس کرتے ہیں

نیز ثابت کرو کہ اگر کوئی مماس دائرہ کو قَ،

رَ پر کاٹے تو شلجمی کے باقی مماسات جو قَ، رَ سے کھینچ سکتے ہیں وہ ایکدوسرے کو محیط دائرہ پر قطع کرینگے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۷ء]

۶۱- ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہے کہ ایک نقطہ معینہ اور ایک ثابت مستقیم خط سے اسکے فاصلون کا مجموعہ ہمیشہ مستقل رہتا ہے ثابت کرو کہ یہ ایک شلجمی مرتسم کرتا ہے، اس شلجمی کے وتر خاص کا طول دریافت کرو

[کوین کالج ۱۸۸۷ء]

۶۲- ایک شلجمی چار ایسے نقطون ا، ب، ج، د سے گذرتا ہے کہ اب، ج د کے متوازی ہے، شلجمی کے محور دریافت کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔

[جیمس کالج ۱۸۸۷ء]

۶۳- ا اور ن دو ثابت نقطے ہیں، کئی ایک شلجمی خط کھینچے گئے ہیں جو ن میں سے گذرتے ہیں اور جن سب کا راس ا ہے، ثابت کرو کہ ن پر کے مماس کے ا پر کے مماس اور عماد کے

ساتھ تقاطع کے نقاط دو ثابت دائروں پر واقع ہیں اور ان دائروں میں سے ایک دائرہ دوسرے کا دگنا ہے

[جون ۱۸۸۷]

۶۴- اگر شلجمی کے کسی نقطہ ن سے محور اور راس پر کے مماس پر عمود ن ل، ن م کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ م ل ہمیشہ ایک شلجمی کو مس کرتا ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶]

۶۵- ایک شلجمی کا متغیر مماس دو ثابت مماسوں کو نقاط ط اور طَ پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت س ط : س طَ مستقل ہے۔

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶]

۶۶- اگر شلجمی کے ایک قطر ن ص پر عمود ق د نکالا جائے تو ثابت کرو کہ

ق دً : ق ص۲ = س ا : س ن

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۶]

۶۷- ایک شلجمی کے ماسکہ س سے ن پر کے مماس پر ایک عمود س ما کھینچا گیا ہے، اس عمود کے پائیں ما میں سے ما ک محور کے متوازی کھینچا گیا ہے جو عماد ن گ کو ک پر ملتا ہے س ک کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلثات س ک گ اور س ک ن میں سے ہر ایک

مثلث س ن ما کے برابر ہے۔

[ٹرنٹی ہوس سنہ ۱۸۸۶]

۶۸۔ و ایک ثابت نقطہ ہے اور م مَ ایک ثابت خط ہے جو و میں سے نہیں گزرتا، خط م مَ پر کوئی نقطہ ق لیا گیا ہے، اگر و ق کی اُس جانب میں جس طرف م مَ واقع نہیں ہوتا ایک ایسا مثلث متساوی الساقین و ن ق بنایا جائے جس کا راسی زاویہ و ن ق اُس زاویہ حادّہ کا دو چند ہو جو و ق، م مَ سے بناتا ہے تو ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک شلجمی ہے۔

[ٹرنٹی ہوس سنہ ۱۸۸۶]

۶۹۔ ایک شلجمی کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا گیا ہے اگر اس مثلث کے ضلعوں کے متوازی مماس کھینچنے سے ایک اور مثلث بنایا جائے تو ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج کے اضلاع طول میں مماسی مثلث کے اضلاع کے چار گنے ہیں

[آئی سی ایس سنہ ۱۸۸۶]

۷۰۔ ایک شلجمی کے نقاط ن۱، ن۲ پر مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر قطع کرتے ہیں، شلجمی کا راس ا ہے اور محور ا ل۱ ل۲ اور ن۱ ن۲ ن پر سے

میںنو ن کے پائیں ل ، ل۲ ، ل ہیں ثابت کرو کہ

ن ل۱ : ن ل۲ = ا ل۱ : ا ل۲ = ا ل۱ : ا ل

[آئی سی ایس ۱۸۸۷ء]

۷۱- و ق ، و قَ شلجمی کے مماس ہیں اور و ص قطر ہے اگر و ص مرتب کو ک پر ملے اور ق قَ محور کو ل پر کاٹے تو ثابت کرو کہ و ک = س ل جہاں س ماسکہ ہے

[آئی ، سی ، ایس ۱۸۸۶ء]

۷۲- اگر ایک ماسکی وتر ن س ق کے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو د پر قطع کریں تو س د ، ن س اور ن ق کا وسط تناسب ہوگا۔

[آئی - سی - ایس ۱۸۸۳ء]

۷۳- ایک دئے ہوئے دائرہ کے ایک قطعہ کے اندر جو دائرے بن سکیں ان کے مرکزوں کا طریق دریافت کرو۔

[ہیڑ ہوس ۱۸۸۰ء]

۷۴- ایک شلجمی کے ماسکہ س میں سے تین وتر ن س نَ ، ق س قَ ، ر س رَ گزرتے ہیں ، ثابت کرو کہ مثلثوں ن ق ر اور نَ قَ رَ کے رقبوں کو آپسمیں وہی نسبت ہے جو ن ،

قَ ، رَ اور نَ ، قَ ، رَ کے معینوں کے حاصل ضربوں کو آپس میں ہے

[بیٹر ہوس ۱۸۸۷ء]

۷۵۔ دو مستقیم خط دئے ہوئے ہیں اور شلجمی خطوط کا ایک سلسلہ اِن خطوط کو مس کرتا ہے اور اس سلسلہ کا ہر ایک شلجمی ان میں سے ایک خط کو ہمیشہ ایک نقطہ معینہ پر مس کرتا ہے ثابت کروکہ اِن شلجمی خطوط کے ماسکے ایک ثابت دائرہ کے محیط پر واقع ہیں اور انکے مرتبات ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں

۷۶۔ دو مساوی شلجمی ہیں ان کا محور مشترک ہے اور انکے قعر متقابل سمتوں میں پھیر دئے گئے ہیں، اگر ایک شلجمی کے ایسے وتر کھینچے جائیں جو دوسرے شلجمی کے مماس ہوں تو ثابت کروکہ ان وتروں کے نقطہ تنصیف کا طریق ایک ایسا شلجمی ہے جسکے خطی ابعاد دئے ہوئے شلجمی خطوط کے ابعاد کے ثلث ہیں

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۷ء]

۷۷۔ ن پر کا عماد راس پر کے مماس کو ف پر اور منحنی کو دوبارہ فَ پر ملتا ہے، اگر شلجمی کا محور ن پر کے مماس اور عماد کو بالترتیب ط اور گ پر ملے تو ثابت کروکہ ن ف × ن فَ = ط گ^2

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۸ء]

۷۸۔ شلجمی کے ایک نقطہ ن پر کا عماد منحنی کو دوبارہ

قَ پر ملتا ہے، وتر ن قَ کا قطب ط ہے اور جو خط ط کو ماسکہ س سے ملاتا ہے وہ اُس خط کو جو ن میں سے س ن پر عمود کھینچنے سے پیدا ہوا ہو و پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

ط س = س و اور زاویہ ط و قَ قائمہ ہے

[جون ۱۸۸۶ء]

۷۹ - ایک شلجمی کے ماسکی وتر ق قَ کا نقطہ تنصیف ص ہے اور ق، قَ پر کے مماس ط پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ مثلث ط ق قَ کے بیرونی دائرہ اور خط ط ص کے نقطہ تقاطع کا طریق شلجمی ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۰ء]

۸۰ - شلجمی کے کسی نقطہ ن سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو منحنی کے نقاط ن۱، ن۲ پر عماد ہیں ثابت کرو کہ وتر ن۱ ن۲ ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[کلیر ۱۸۸۶ء]

۸۱ - دو مساوی شلجمی وضعاً اور شکلاً متشابہ ہیں اور انکا محور ایک ہی ہے، ایک شلجمی کا ایک مماس کھینچا گیا ہے جو دوسرے شلجمی کو ن اور قَ پر ملتا ہے ثابت کرو کہ قَ کا عمودی فاصلہ اُس قطر سے جو ن میں سے گذرتا ہے مستقل ہے اور شلجمی کے اس حصے کا رقبہ جو وتر ن قَ کھینچنے سے کٹتا ہے مستقل ہے

[پمبرک کالج ۱۸۸۶ء]

۸۲- شلجمی پر ایک ایسا نقطہ دریافت کرو جس پر کا عماد ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے برابر ہو

[ٹرنٹی ہال ۱۸۸۶ء

۸۳- شلجمی کے تین مماس کھینچنے سے جو مثلث بنتا ہے وہ متساوی الساقین ہے، ثابت کروکہ جو خط مساوی اضلاع کے نقطہ تقاطع کو ماسکہ سے ملاتا ہے وہ مقابل کے ضلع کے نقطہ تماس میں سے گذرتا ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء

۸۴- دو شلجمی خطوط جن کا ماسکہ مشترک ہے ایکدوسرے کو زاویہ قائمہ پر کاٹتے ہیں ثابت کروکہ انکے راسونکا خط وصل ماسکہ میں سے گذرتا ہے اور ان کے نقطہ تقاطع کے ماسکی نیم قطر کے برابر ہے

[جون ۱۸۸۶ء

۸۵- اگر ن ل شلجمی کا کوئی معین ہو اور ق ل قَ کوئی وتر ہو جو ل میں سے گذرے اور شلجمی کو ق اور قَ پر کاٹے تو ثابت کروکہ ق اور قَ کے معینوں کی حاصل ضرب ن ل کے مربع کے برابر ہوگی۔

[سلون ۱۸۸۷ء

۸۶- دو ثابت مستقیم خط ایکدوسرے کو ا پر قطع کرتے ہیں اور ب ایک ثابت نقطہ ہے، اگر

ایک ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ا اور ب میں سے گذرے
اور ان خطوں کو ج اور د پر کاٹے تو ثابت کرو کہ ج د
ہمیشہ ایک شلجمی کو مس کرتا ہے
[سلون کالج ۱۸۸۴ء]

۸۷- شلجمی کے اس نقطہ پر جس کا معین اسکے فصلہ کے
برابر ہے عادی وتر کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ اسکے محاذی
ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے
[پیٹر ہوس ۱۸۸۵ء]

۸۸- ایک دائرہ شلجمی کے ماسکہ میں سے گذرتا ہے، یہ منحنی کو
ن پر مس کرتا ہے اور علاوہ اسکے ل اور م پر کاٹتا ہے
اگر یہ محور کو ع پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ل ن، م ع
کے مساوی ہے۔
[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۸۹- اگر ایک شلجمی کا محور ایک دئے ہوئے خط کے
متوازی ہو اور شلجمی دو نقاط معلومہ میں سے گذرے اور
ایک ایسے خط کو مس کرے جو (ان دو نقاط معلومہ میں سے
ایک نقطہ سے گذرتا ہو تو شلجمی کے مرتب کا مقام ہندسی
عمل سے دریافت کرو
[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۹۰- شلجمی کے مماسات ط ن، ط ق کے محاذی
ماسکہ پر جو زاوئے بنتے ہیں وہ ط کے سب مقامات
کے لئے مستقل ہیں، ثابت کرو کہ اگر مثلثات
س ن ط، س ط ق کے گرد دائرے بنائے
جائیں تو ان کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ ایسے بدلیگا
جیسے $س ط^2$
[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۹۱- ایک شلجمی کا ماسکی وتر ن ق ہے اور ق میں سے گزرنے والے قطر پر کوئی نقطہ ر ہے، ثابت کرو کہ اُس ماسکی وتر کا طول جو ن ر کے متوازی ہے $= \frac{\text{ن ر}^2}{\text{ن ق}}$

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۹۲- ایک مثلث ا ب ج کے ضلعوں پر نقاط د، ع، ف لئے گئے ہیں اور تین ہم ماسکہ شلجمی کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک ب ف، ف ع، ع ج کو مس کرتا ہے اور باقی دو شلجمی خطوط کے متماثل ثلاثیوں کو، مشترک ماسکہ س ہے اور مرتبات ایک دوسرے کو گ، ح، ک پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ مثلثات د س گ، ع س ح، ف س ک بالترتیب س د، س ع، س ف کے مربعوں کے متناسب ہیں۔

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۹۳- دو ہم ماسکہ شلجمی ہیں ان کے ایک نقطہ بیرونی ط سے ایک شلجمی کے مماس ط ن، ط ق اور دوسرے شلجمی کے ط ر، ط س کھینچے گئے ہیں، اگر زاویوں ن ط ق، ر ط س کا مجموعہ ۱۸۰° ہو تو ثابت کرو کہ ن ر، ق س یا تو متوازی ہیں یا ماسکہ پر ملتے ہیں، اگر وہ متوازی ہوں تو ثابت کرو کہ وہ شلجمی خطوط کے مشترک مماسوں کے بھی متوازی ہیں۔ [پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۹۴- دو ثابت نقطوں ا اور ب سے ایک متغیر خط پر عمود ا ن، ب ق نکالے گئے ہیں، اگر ذو اربعۃ الاضلاع ا ب ق ن کا رقبہ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ متغیر خط کا لفاف شلجمی ہے۔

[کیئز کالج ۱۸۸۵ء]

۹۵- شلجمی کے وتر خاص کے ایک سرے خ پر کا عماد منحنی کو دوبارہ ن پر ملتا ہے، ن پر کا مماس، ممدودہ وتر خاص کو م پر اور محور کو ط پر ملتا ہے۔
ثابت کرو کہ خ م وتر خاص کا $\frac{۵}{۴}$ گنا اور ل ط، $\frac{۹}{۲}$ گنا ہے جہاں ن ل نقطہ ن سے محور پر عمود ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۵ء]

۹۶- شلجمی کا راس ا اور ماسکہ س ہے اور اس پر کوئی نقطہ ن لیا گیا ہے، ن پر کا معین ن ل ہے، اگر ماسکہ س میں سے س ن پر عمود کھینچا جائے اور یہ عمود ن پر کے عماد کو ع پر ملے اور ع کا معین ع م ہو تو ثابت کرو کہ س م = ۲ ا ل

[کوین کالج ۱۸۸۶ء]

۹۷- ایک شلجمی پر دو نقاط ن اور ق ہیں اور انکو ملانے والے وتر کا وسطی نقطہ ر ہے، ر ل نقطہ ر کا معین ہے جو محور پر عمود ہے ن ق پر عمود ر گ نکالا گیا ہے اور یہ محور کو گ پر ملتا ہے،

ثابت کرو کہ م گ شلجمی کے نیم وتر خاص کے برابر ہے
[کوین کالج سنہ ۱۸۸۶]

۹۸۔ ثابت کرو کہ وتر خاص چھوٹے سے چھوٹا ماسکی وتر ہے جو شلجمی میں کھینچا جا سکتا ہے۔
[کیتھرین کالج سنہ ۱۸۸۶]

۹۹۔ ایک ایسا شلجمی بناؤ جو تین دئے ہوئے خطوط مستقیم کو مس کرے اور جس کا ماسکہ ایک اور دئے ہوئے خط میں واقع ہو۔

۱۰۰۔ ایک شلجمی کے ماسکہ س سے ن پر کے مماس کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو منحنی کو ق پر ملتا ہے، ن میں سے گزرنے والا قطر س ق کو ع پر ملتا ہے ثابت کرو کہ ع کا طریق ایک ایسا شلجمی ہے جس کا وتر خاص دئے ہوئے شلجمی کے وتر خاص کا نصف ہے
[جیسس کالج سنہ ۱۸۶۱]

۱۰۱۔ ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے عماد کے پائیں گ سے ایک خط گ ر ایسا کھینچا گیا ہے جو س ن پر عمود ہے اور جو اُس دائرہ کو جو س ن کو قطر مان کر کھینچا جائے نقطہ ل پر ملتا ہے، اگر ل س کو خارج کیا جائے تو وہ ن پر کے مماس کو و پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت و س : و ن مستقل ہے۔
[سڈنی کالج سنہ ۱۸۶۱]

۱۰۲- شلجمی خطوط اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ وہ دو ثابت نقاط ا اور ب میں سے گزرتے ہیں اور انکے محور ایک سمت معینہ میں واقع ہوتے ہیں، ان کے ماسکوں کا طریق دریافت کرو۔

[سینٹ جون کالج سنہ ۱۸۶۱ء]

۱۰۳- شلجمی خطوط کا ایک سلسلہ ایسا ہے کہ اس کے ہرایک منحنی (شلجمی) کے راس پر کا مماس ایک اور دئے ہوئے شلجمی کے راس پر کے مماس پر منطبق ہوتا ہے اور اس سلسلہ کے ہرایک شلجمی کا ماسکہ دئے ہوئے شلجمی پر واقع ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ شلجمی خطوط ایک دوسرے کو دئے ہوئے شلجمی کے ماسکہ پر قطع کرتے ہیں۔

[ہیتر ہوس سنہ ۱۸۶۱ء]

۱۰۴- ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا مماس ایک ثابت دائرہ کو جس کا مرکز ماسکہ ہے ق اور ر پر ملتا ہے اگر شلجمی کے باقی دو مماس جو ق اور ر میں سے گزرتے ہیں ایک دوسرے کو ط پر قطع کریں اور دائرہ کے ق اور ر پر کے مماس ایک دوسرے کو ص پر ملیں تو ثابت کرو کہ ط ص مرتب کے متوازی ہے۔

[ہیتر ہوس سنہ ۱۸۸۲ء]

۱۰۵- ایک شلجمی کے ماسکی وتر کے نقطہ تنصیف میں سے ایک ایسا خط کھینچا گیا ہے جو مرتب پر عمود ہے

اور جس کا طول ماسکی وتر کا نصف ہے، اسکے سرے کا طریق دریافت کرو۔

[کلیر ۱۸۸۲ء]

۱۰۶۔ ایک شلجمی کے نقطہ ن سے راس پر کے مماس پر عمود ن م کھینچا گیا ہے، اگر نقطہ م سے ا ن پر عمود م ق نکالا جائے تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک دائرہ ہے

[ترنیٹی ہوس ۱۸۸۲ء]

۱۰۷۔ ایک شلجمی کے محور پر ایک ثابت نقطہ ہے، اس نقطہ میں سے ایک وتر ن ق گزرتا ہے، اگر ایک دئے ہوئے نصف قطر کا ایک دائرہ بنایا جائے جو ن اور ق کے معینوں کے پایوں میں سے گزرے تو ثابت کرو کہ دائرہ کے مرکز کا طریق ایک دائرہ ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۱۰۸۔ ایک دائرہ ایک دئے ہوئے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے اور ایک دئے ہوئے خط سے ایک ایسا حصہ کاٹتا ہے جس کا طول ہمیشہ مستقل رہتا ہے، ثابت کرو کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق شلجمی ہے اور ان دائروں کے وتر تقاطع کا لفاف ایک مخروطی تراش ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۱۰۹۔ ن س نَ ایک شلجمی کا ماسکی وتر ہے، ن اور نَ میں سے گزرنے والے قطر نَ اور ن پر کے

عمادوں کو بالترتیب ص اور صَ پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ ن ص صَ نَ ایک متوازی الاضلاع ہے

[جیمس کالج ۱۸۸۶ء]

۱۱۰- ایک قطاع دائرہ ج ا ن ہے، دائرہ کا مرکز ج
ہے اور اس کے نصف قطر ج ا کو ثابت کر دیا گیا ہے،
اگر ج ا اور ج ن دونوں کو خارج کیا جائے اور ایک
ایسا دائرہ کھینچا جائے جو ان ممدودہ خطوط کو مس کرے
اور قوس ا ن کو بھی خارجاً مس کرے تو ثابت کرو کہ
اس دائرہ کے مرکز کا طریق ایک شلجمی ہے

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۱۱۱- ایک شلجمی ایک مثلث کے تینوں اضلاع کو مس
کرتا ہے اور اس کے محور کی سمت دی ہوئی ہے، ثابت کرو
کہ ذیل کے عمل سے اس کا ماسکہ معلوم ہو سکتا ہے۔
مثلث کے ایک راس الزاویہ ا میں سے دی ہوئی سمت
پر عمود ا د نکالو جو دائرہ ا ب ج کو د پر ملے، نقطہ د
میں سے مقابل کے ضلع پر عمود د س کھینچو جو دائرہ
مذکور کو س پر ملے، تب س شلجمی کا ماسکہ ہوگا۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۱۱۲- ایک شلجمی پر تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور
شلجمی کا ماسکہ س ہے، نقطہ ر میں سے خط ر د،
ر ص کھینچے گئے ہیں جو ن اور ق کے مماسات کے

بالترتیب متوازی ہیں اور جو ق میں سے گزرنے والے قطر کو د اور ص پر ملتے ہیں، ہندسی طریق سے ثابت کرو کہ ردٓ = ۴ س ن × ق ص اس نتیجے کی مدد سے ذیل کے مسئلہ کو ہندسی طریق سے ثابت کرو۔

ایک شلجمی کے مماس ط ق، ط ر نقطہ ن پر کے مماس کو لا اور ما پر ملتے ہیں۔ جو قطر ط میں سے گزرتا ہے اس کے سرے پر کا مماس ن پر کے مماس کو و پر ملتا ہے، اگر س ماسکہ ہو تو ثابت کرو کہ

س ن × ق ر = ۲ س و × لاما

[سنٹ جون کالج ۱۸۸۶ء]

۱۱۲۳۔ دو ہم ماسکہ اور ہم محور شلجمی اس طرح کھینچے گئے ہیں کہ ان کے قعر متقابل جانبوں میں واقع ہیں، ایک مستقیم خط جو محور کے متوازی ہے ان کو ن اور نَ پر ملتا ہے، ان کا وتر مشترک ق قَ، ن نَ کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ رق × رقَ : ن نَ ایک مستقل نسبت ہے،

[پٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۱۱۲۴۔ ایک شلجمی کے تین مماس کھینچنے سے ایک مماسی مثلث بنایا گیا ہے ہمیں معلوم ہے کہ اس مثلث کا بیرونی دائرہ ماسکہ میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ اس دائرہ کا مماس جو شلجمی کے ماسکہ پر کھینچا جائے

محور سے ایک ایسا زاویہ بناتا ہے جو اُن تینوں زاویوں کے مجموعہ جبریہ کے مساوی ہوتا ہے جو شلجمی کے مماس محور سے بناتے ہیں

[پیٹرہوس ۱۸۸۴ء]

۱۱۵- ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا عماد ن ق ہے اور ط اس کا قطب ہے، ثابت کرو کہ ن س، ط میں سے گزرنے والے قطر کے راس میں سے گزرتا ہے۔

[پیٹرہوس ۱۸۸۵ء]

۱۱۶- ایک متحرک مستقیم خط میں سے دو ثابت دائرے ہمیشہ مساوی وتر کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ یہ خط ہمیشہ ایک ایسے شلجمی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ دائروں کے مرکزوں کے خط وصل کا نقطہ تنصیف ہے

[پیٹرہوس ۱۸۸۵ء]

۱۱۷- اگر ایک شلجمی کے ہر ایک نقطہ کے معین کو محور کے نیچے اتنا خارج کیا جائے کہ اس کا طول اس فاصلہ کے مساوی ہو جائے جو ماسکہ اور نقطہ مذکورہ کے درمیان ہے تو ثابت کرو کہ معین کے سرے کا طریق ایک اور شلجمی ہے اور ان منحنیات کے محور ایک دوسرے سے ایک ایسا زاویہ بناتے ہیں جو نصف زاویہ قائمہ کے برابر ہے،

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۱۱۸- ایک شلجمی کے دو ثابت مماس ط ی، ط ر ہیں ان کو ایک متغیر مماس لا اور ما پر ملتا ہے، اگر شلجمی کا ایک ایسا وتر کھینچا جائے جو لاما کے مساوی اور متوازی ہو تو ثابت کرو کہ یہ وتر ایک مساوی شلجمی کو لمس کرتا ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۱۹- ایک شلجمی کے ایک نقطہ ن میں سے ایک ایسا خط کھینچا گیا ہے جو ن اور راس کے خط وصل پر عمود ہے، یہ خط محور کو ک پر ملتا ہے اور ن پر کا عماد محور کو گ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ گ ک نصف وتر خاص کے برابر ہے۔

[ٹرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۲۰- شلجمی کے ایک نقطہ میں سے دو وتر کھینچے گئے ہیں جو اس نقطہ پر کے مماس سے مساوی زاوے بناتے ہیں، اگر ان وتروں کے قطر کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ وتروں کے طول انکے قطروں کے اُن حصوں کے متناسب ہونگے جو منحنی اور قطروں کے درمیان واقع ہیں۔

[ٹرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۲۱- ن س ن، ایک شلجمی کا ماسکی وتر ہے، ن س اور ن، س کو قطر مان کر دائرے کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ دائروں کے کسی مشترک مماس کا طول اس

اور ن ن کا وسط تناسب ہے

[ٹرنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۲- دو مستقیم خط و لا اور و ما ایک دوسرے کو زاویۂ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور ایک مستقیم خط ن ق اُن کو نقاط ن اور ق پر قطع کرتا ہے، اور ن ق کا نقطہ تنصیف ایک ثابت مستقیم خط ا ب پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ مستقیم خط ن ق ہمیشہ ایک ثابت شلجمی کو مس کرتا ہے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۳- اگر ن پر کا عماد ن گ محور کو گ پر ملے اور اگر نقطہ گ پر ایک معین گ ق قائم کیا جاے تو ثابت کرو کہ ن گ اور ق گ کے مربعوں کا فرق ایک مستقل مقدار کے برابر ہے

پمبرک کالج ۱۸۸۵ء

۱۲۴- ایک مرکز دار تراش کا قطر ج ط ایک وتر ق قَ کو ص پر کاٹتا ہے، منحنی کو ن پر اور ق پر کے مماس کو ط پر، ثابت کرو کہ ج ص × ج ط = ج ن^2
شلجمی کی صورت میں یہ مسئلہ کیا ہوگا۔ اس کو ثابت کرو

۱۲۵- ن س ق ایک شلجمی کا ماسکی وتر ہے۔ ن گ، ن پر کا عماد ہے اور ن ل نصف معین

ہے اگر ن ل کو اتنا خارج کیا جائے کہ وہ ق میں سے گزرنے والے قطر کو ح پر ملے تو ثابت کرو کہ ح گ، ن گ پر عمود ہے

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۵ء]

۱۲۶- شلجمی کے مرتب پر کوئی نقطہ و ہے نقطہ و سے شلجمی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور ماسکہ س میں سے ان مماسات کے متوازی دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ مرتب کا جو حصہ ان متوازی خطوط کے درمیان واقع ہے اس کی تنصیف و پر ہوتی ہے

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۷- رسی کے ایک حلقہ ون ق کو و پر باندہ دیا گیا ہے اور دو چھوٹے دانے ن اور ق رسی پر حرکت کر سکتے ہیں، اگر رسی کو ہمیشہ کس کر رکھا جائے اور ون، وق کے برابر ہو اور ن ق کی سمت ہمیشہ وہی رہے تو ثابت کرو کہ ن اور ق کے طریق دو شلجمی خطوط ہیں جن دونوں کا ماسکہ و ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۸- ایک ثابت دائرہ پر ایک ثابت نقطہ و ہے، دائرہ پر کے کسی نقطہ س کو ماسکہ اور و پر کے مماس کو مرتب مانکر ایک شلجمی کھینچا گیا ہے، اگر و سے اس شلجمی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ انکے

نقاط تماس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۱۲۹۔ اگر شلجمی کے کسی نقطہ سے وتر کھینچے جائیں جو اس نقطہ پر کے مماس سے مساوی زاوے بنائیں تو ثابت کرو کہ انکے طولوں کو آپس میں وہی نسبت ہوگی جو انکے متوازی ماسکی وتروں کو ہے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۰۔ ایک دیئے ہوئے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ د ہے اور ج دائرہ کا مرکز ہے، اگر کوئی وتر رس، دج کے متوازی ہو اور اس وتر کا نقطہ تنصیف م ہو تو ثابت کرو کہ ج ر، ج س خط دم کو ایک شلجمی پر قطع کرتے ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۱۔ ایک نقطہ و کا قطبی خط بلحاظ ایک شلجمی کے محور کو ی پر ملتا ہے، اگر نقطہ ی میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے جو قطبی پر عمود ہو اور جو وس کو ر پر ملے تو ثابت کرو کہ وس = س ر

[جیسس کالج ۱۸۸۵ء]

۱۳۲۔ تین شلجمی خطوں کا ایک مماس مشترک ہے، ثابت کرو کہ ان کے مشترک مماسوں کے جو باقی زوج ہیں ان کے نقاط تقاطع ایک ہی خط پر واقع

ہوتے ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۳۔ ایک شلجمی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، اگر انکے وتر تماس پر ماسکہ سے ایک عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ یہ عمود اُس مقطوعہ کے نقطہ تنصیف میں سے گزرتا ہے جو راس پر کے مماس پر ان دو مماسوں کے درمیان واقع ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۴۔ مساوی شلجمی خطوط کے کئی زوج کھینچے گئے ہیں، ہر ایک شلجمی کا ماسکہ ایک دیا ہوا نقطہ س ہے اور ہر ایک زوج کا ایک شلجمی ایک دیئے ہوئے خط اب کو مس کرتا ہے اور اس کا دوسرا شلجمی خط اج کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ ان کے مشترک مماسوں کا لفاف ایک شلجمی ہے جس کا مرتب س میں سے گزرتا ہے اور جو اب اور اج کو ایسے نقطوں پر مس کرتا ہے جن کا خط وصل س میں سے گزرتا ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۵۔ ایک شلجمی کا ماسکہ س ہے اور اس کے تین نقاط ن، ق، ر پر تین مماس ولان، وماق، لارما کھینچے گئے ہیں۔ اگر مماس لاما اپنا مقام بدلے تو س کے علاوہ جو دوائر س لان، س ماق،

کا دوسرا تقاطع ہے اِس کا طریق دریافت کرو۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۱۳۶- اگر دو شلجمی خطوں کا ایک مشترک ماسکہ ہو تو ثابت کرو کہ جو خط ماسکہ کو مرتبوں کے نقطہ تقاطع سے ملاتا ہے وہ شلجمی خطوں کے مشترک مماس پر عمود ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۷- تین شلجمی خطوں کا ایک ہی راس ہے اور ایک ہی محور، لیکن ان کے وتر خاص سلسلہ ہندسیہ میں ہیں۔ اگر بیرونی شلجمی کے کسی نقطہ سے درمیانی شلجمی کے دو مماس کھینچے جائیں اور ان کا وتر تماس ن ق ہو تو ثابت کرو کہ ن ق اندرونی شلجمی کو مس کرتا ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۸- ایک مثلث دیا ہوا ہے، اگر ایک شلجمی اسکے تینوں اضلاع کو مس کرے تو ثابت کرو کہ ہر ایک وتر تماس ایک ثابت نقطہ میں سے گزریگا۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۱۳۹- ایک شلجمی کے ماسکہ کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور وہ ن پر کے مماس کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے ایک نقطہ تو مرتب پر ہے اور دوسرا نقطہ ط ہے، س ن یا س ن ممدودہ پر عمود ط م نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ س م نصف وتر خاص

کے برابر ہے۔

۱۴۰۔ ایک بیرونی نقطہ و سے ایک شلجمی کے دو مماس وق اور وقَ کھینچے گئے ہیں اور نقطہ و سے محور پر عمود نکالا گیا ہے جو اس کو ل پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ل ق اور ل قَ محور سے مساوی زاویے بناتے ہیں۔

[کینز کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۱۔ دو شلجمی خطوں کا ایک ہی ماسکہ ہے اور ایک ہی محور، اگر ایک شلجمی کے نقطہ ن پر مماس کھینچا جائے تو وہ دوسرے شلجمی کے نقطہ ق پر کے مماس کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتا ہے اور ان مماسوں کا نقطہ تقاطع ط ہے، ثابت کرو کہ ط اُن قطروں سے جو ن اور ق میں سے گزرتے ہیں مساوی فاصلوں پر واقع ہیں

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۲۔ شلجمی کے ایک ماسکی وتر کے سروں پر کے مماس سے ن پر کے مماس سے ایک حصہ کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ اس حصہ یا مقطوعہ کے محاذی اُس نقطہ پر جو ن میں سے گزرنے والے قطر اور ماسکی وتر کا نقطہ تقاطع ہے زاویہ قائمہ بنتا ہے،

[کینز کالج ۱۸۸۳ء]

۱۴۳۔ ایک ثابت نقطہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے اور اس خط پر ایک عمود قائم کیا گیا ہے جو ثابت نقطہ

میں سے گزرتا ہے، یہ عمود ایک اور ثابت خط کو ایک نقطہ پر کاٹتا ہے، اس نقطہ میں سے ثابت خط پر ایک عمود قایم کیا گیا ہے جو پہلے خط کو (یعنی اس خط کو جو ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے) ن پر کاٹتا ہے۔ ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک شلجمی ہے۔

[کلیبر کالج ۱۸۸۳ء]

۱۴۴- متوازی مستقیم خطوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اس نظام کا ایک خط دو ثابت شلجمی خطوں کو ن، نَ اور ق، قَ پر کاٹتا ہے، ن اور نَ میں سے ایک شلجمی کے محور کے متوازی دو خط کھینچے گئے ہیں، اسی طرح سے ق اور قَ میں سے دوسرے شلجمی کے محور کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اس طرح سے جو شکل متوازی الاضلاع بنتی ہے اس کے نقاط راس ایک ثابت مخروطی تراشں پر واقع ہوتے ہیں۔ [کرائسٹ کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۵- ایک شلجمی کا راس ا ہے اور منحنی پر کوئی نقطہ ن ہے، ان کو ق تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن ق = ان، نقطہ ق میں سے ایک مستقیم خط م ق ل کھینچا گیا ہے جو اق پر عمود ہے اور محور کو م پر ملتا ہے، اگر ق ل، ق م کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ل کا طریق ایک شلجمی ہے اس شلجمی کا ل پر کا عماد دریافت کرو

[کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۶- اگر ن پر کا عاد محور کو گ پر ملے تو ثابت کرو
کہ اس دائرہ کے مرکز کا طریق جو ان گ کے گرد بنایا
جائے ایک شلجمی ہے [کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۷- ایک شلجمی کے تین مماس دئے ہوئے ہیں
اور ایک مماس کا نقطہ تماس معلوم ہے، شلجمی کو بناؤ
اور اس کا ماسکہ دریافت کرو

[کیتھرین کالج ۱۸۸۴ء]

۱۴۸- ایک مثلث متساوی الاضلاع ایک شلجمی کے
گرد بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ مثلث کے تین اضلاع اور
تین وتر تماس مرتب کو ایسے پانچ نقطوں پر کاٹتے
ہیں جن میں سے دو مسلسل نقطوں کے درمیانی فاصلہ کے
محاذی ماسکہ پر مساوی زاوئے بنتے ہیں [ترنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۴۹- ایک شلجمی کا وتر ن نَ محور پر عمود ہے، اگر نَ میں
سے گزرنے والا قطر ن پر کے مماس اور عماد کو بالترتیب
ق اور ر پر ملے تو ثابت کرو کہ ق ر کا وسطی نقطہ ایک
ثابت شلجمی پر واقع ہوگا

[جیمس کالج ۱۸۸۴ء]

۱۵۰- ایک شلجمی کے دو نقطوں ن اور ق پر کے
مماس ایک دوسرے کو ط پر اور انہی نقطوں پر کے
عماد ایک دوسرے کو و پر قطع کرتے ہیں اگر
محور پر عمود ط م اور و ل نکالے جائیں جو

محور کو م اور ل پر ملیں تو ثابت کرو کہ

ط م × ا م = و ل × ا س

[جیمس کالج ۱۸۸۴ء]

۱۵۱- ایک شلجمی کے نقاط ن اور ق پر کے مماس نقطہ ط پر ملتے ہیں اور شلجمی کے قطر کھینچے گئے ہیں جو ن ق کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں - اگر ان قطروں میں سے ایک کے سرے پر کا مماس ط ن پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ مثلث ن ط ق متساوی الساقین ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۱۵۲- اگر وتر ن ق کا قطب ط ہو اور ن ق، ن ط سے زاویہ قائمہ بنائے (یعنی ن ق نقطہ ن پر کا عماد ہو) تو ثابت کرو کہ زاویہ ﮐط ق قائمہ ہے۔

۱۵۳- ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا عماد ن گ ہے، ن گ کے نقطہ وسطی سے منحنی کے دو عماد رق، رقَ کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ ق س، قَ س محور سے مساوی زاوئے بناتے ہیں۔

ہلیلجی

۱۵۴- دو خط اب اور اج متقاطع علی القوائم ایک ایسے ہلیلجی کو مس کرتے ہیں جس کا مرکز و ہے اور یہی خط ایک ایسے دائرہ کو جس کا مرکز و اور نصف قطر و ا ہے نقاط ب اور ج پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ و ا اور ب ج ہلیلجی کے مزدوج قطروں پر منطبق ہوتے ہیں

[آئی-سی-یس]

۱۵۵- ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا عماد محور کو گ پر ملتا ہے اور ماسکہ س میں سے ن س ک کھینچا گیا ہے جو ج ن کے مزدوج قطر کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت ج گ : س ک ہلیلجی کے خروج المرکز کے برابر ہے

[آئی سی یس ۱۸۸۵]

۱۵۶- ایک ہلیلجی کے دو ماسکے اور ایک مماس دیا ہوا ہے اس کو بناؤ

[آئی سی ایس]

۱۵۷- ہلیلجی کے دو مزدوج قطر ج ن اور ج د ہیں،

اگر ن اور د پر ہلیلجی کے عماد کھنچے جائیں اور انکے نقطہ تقاطع اور ہلیلجی کے مرکز کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ خط مستقیم خط ن د پر عمود ہے۔

[آئی - سی - ایس]

۱۵۸- ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور سَ ہیں اور ان کے مقابل مرتبوں کے پائیں لا اور لاَ ہیں، اگر ہلیلجی کے کسی مماس پر عمود س ما، سَ ماَ نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ لا ما، لاَ ماَ ایکدوسرے کو محور اصغر پر قطع کرتے ہیں

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۳ء]

۱۵۹- ہلیلجی کے مرکز سے ن پر کے مماس پر عمود نکالا گیا ہے اور اس عمود کا ظلّ محور اصغر پر ج ل ہے، اگر ایک دائرہ مثلث س ن سَ کے گرد بنایا جائے اور ن ق اس کا قطر ہو تو ثابت کرو کہ

ن ق × ج ل = ا ج۲

[پٹیر ہوس ۱۸۸۷ء]

۱۶۰- ہلیلجی کے اندرونی نقطہ و سے دو عماد و ا اور و ب کھینچے گئے ہیں جو ایکدوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں، یہ عماد دوبارہ ہلیلجی کو بالترتیب ج

اور د پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

و ا : و ب = و ج : و د

[پیتر ہوس ۱۸۸۷ء]

۱۶۱۔ ہلیلجی کے ایک وتر ن ن کا عمودی منصف محور اعظم کو ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ک = ل ۲ × ج ل جہاں ل خروج المرکز ہے اور ج ل وتر ن ن کے وسطی نقطہ کا فصلہ ہے جو مرکز ج سے ناپا گیا ہے۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۲۔ دو ثابت مستقیم خطوں پر طول ج ا، ج ب لئے گئے ہیں اور انکے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، متوازی الاضلاع ا ب ن ج کی تکمیل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ہلیلجی ہے جو ثابت خطوں پر مساوی حصے کاٹتا ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۳۔ ہلیلجی پر کا کوئی نقطہ ن دو مزدوج نیم قطروں ج ا، ج ب کے سروں سے ملایا گیا ہے۔ ن ا اور ن ب اقطار ج ب اور ج ا کو بالترتیب بَ اور اَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

ا اَ × ب بَ = ۲ ج ا × ج ب

[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۴۔ ایک ہلیلجی اور ایک دائرہ ہم مرکز ہیں اور ہلیلجی

دائرہ کے بالکل باہر واقع ہے، ثابت کرو کہ دائرہ کا ایک متغیر مماس ہلیلجی سے جو رقبہ کاٹتا ہے وہ اقل یا اعظم اسوقت ہوگا جبکہ مماس ہلیلجی کے محور کے متوازی ہو، مختلف صورتوں میں تمیز کرو

[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۵- چار نقطے ن، ق، ر، س ہلیلجی پر ایسے ہیں کہ ہلیلجی کا مرکز ایک محور کے اُس حصہ کی تنصیف کرتا ہے جو ن ق اور ر س کے درمیان واقع ہو، ثابت کرو کہ مرکز اُس محور کے اُن حصوں کی تنصیف کریگا جو ن ق، ر س اور ن س، ق ر کے درمیان واقع ہوں گے

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۶۶- امدادی دائرہ کے قطر کے مقابل کے سروں سے ہلیلجی کے مماس کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ انکے نقاط تقاطع مرتبوں پر واقع ہوتے ہیں

[ترنتی کالج ۱۸۸۸ء]

۱۶۷- ایک دائرہ کا مرکز ج ہے اور اسکے اندر ایک متغیر قائم الزاویہ مثلث ن ق ر بنایا گیا ہے، ق زاویہ قائمہ ہے، اگر ضلع ق ر ہمیشہ ایک ایسے ثابت نقطہ س میں سے گزرے جو دائرہ کے اندر واقع ہو تو ثابت کرو کہ ن ق ایک ہلیلجی کو مس

کرتا ہے، اور اگر ق ج اور ن س ایک دوسرے کو و پر قطع کریں تو ر و اور ن ق کا تقاطع وہ نقطہ ہے جہاں ن ق ہلیلجی کو مس کرتا ہے

[لنڈن بی۔ اے آنرز ۱۸۸۶ء]

۱۶۸۔ ثابت کرو کہ ایک ہلیلجی میں مساوی مزدوج قطروں کا ایک زوج ہوتا ہے، اگر ہلیلجی کے محور اعظم کے ایک سرے کو ایک مساوی مزدوج قطر کے سرے سے ملایا جائے اور اس خط وصل کے متوازی محور اصغر کے سروں سے خطوط کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ہلیلجی کو اُن دو نقطوں پر ملینگے جہاں دوسرا مساوی مزدوج قطر اسکو ملتا ہے

[لنڈن بی۔ اے آنرز ۱۸۸۶ء]

۱۶۹۔ ایک مثلث دیا ہوا ہے، اس کے اندر ایک ہلیلجی بنانا ہے جو اسکے اضلاع کو مس کرے، اگر ایک ماسکہ کا مقام معلوم ہو تو ہلیلجی کو بناؤ اور اضلاع کے نقاط تماس دریافت کرو

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۸ء]

۱۷۰۔ ایک ہلیلجی کے اندر ایک ایسی شکل ذو اربعۃ الاضلاع بنائی گئی ہے جس میں ن ق اور س ر متوازی ہیں اگر ق ر، ن س کے متوازی ہلیلجی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانے والا خط ن ق اور س ر کے متوازی ہے۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۱- ن ق ایک شلجمی کا وتر ہے اور ط اس کا قطب ہے ن ق پر کے ایک نقطہ کو مرکز مان کر ایک ایسا ہلیلجی بنایا گیا ہے جو مثلث ن ط ق کے نقاط الزوایا میں سے گذرتا ہے، نقطہ ط پر ہلیلجی کا مماس کھینچا گیا ہے اور بلحاظ شلجمی کے اس مماس کا قطب ک ہے، ثابت کرو کہ ط ک ہلیلجی کے ایک ایسے قطر کے متوازی ہے جو ن ق کا مزدوج ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۷ء]

۱۷۲- دو ہم ماسکہ ہلیلجی دئے ہوئے ہیں، ان پر دو نقطے ن اور ق ایسے دئے گئے ہیں کہ ماسکون کو ملانے والے خط کے محاذی ان پر مساوی زاوئے بنتے ہیں، ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماسوں کا زاویہ تقاطع اُس زاویہ کے مساوی ہے جو ن ق کے محاذی کسی ایک ماسکہ پر بنتا ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۷ء]

۱۷۳- ایک دائرہ کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ا ہے اور دائرہ پر کے کسی نقطہ ن سے ا پر کے مماس پر ایک عمود ن م نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ ن م کے وسطی نقطہ کا طریق ہلیلجی ہے، اسکا مرکز اور اسکے محاور دریافت کرو

[کوین کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۴۔ ایک ایسا ہلیلجی بنایا گیا ہے جس کا مرکز ایک شلجمی کے ماسکہ پر ہے اور جس کے مرتب شلجمی کے وہ دو قطر ہیں جو وتر خاص کے سروں پر کھینچے جائیں، ثابت کرو کہ یہ ہلیلجی، شلجمی کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۱۷۵۔ ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کے مماس پر مرکز ج سے عمود نکالا گیا ہے اور اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ وہ ن پر کے معین ل ن ممدودہ کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ر کا طریق ہلیلجی ہے، نیز ثابت کرو کہ اگر ن، ق، ر پر بالترتیب ہلیلجی، امدادی دائرہ اور ر کے طریق کے مماس کھینچے جائیں تو وہ ایک ہی نقطہ پر ملیں گے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۴ء]

۱۷۶۔ دو ایسے دائرے کھینچے گئے ہیں جو ہلیلجی کو مزدوج نقاط ن اور د پر مس کرتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک دائرہ مرکز ج میں سے گزرتا ہے ثابت کرو کہ ان کے نصف قطروں کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ج ن کو ج د سے ہے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۳ء]

۱۷۷۔ ایک ایسا شلجمی بنایا گیا ہے جو ایک دئے ہوئے ہلیلجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے اور جس کا

ماسکہ ہلیلجی پر کا کوئی نقطہ ہے، ثابت کرو کہ شلجمی کا مرتب ہلیلجی کے امدادی دائرہ کو مس کرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ہلیلجی کے ماسکوں پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوتا ہے۔

[جیمس کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۸۔ ایک ثابت نقطہ و میں سے ایک دیئے ہوئے ہلیلجی کا ایک وتر ن ق کھینچا گیا ہے، ایک اور ہلیلجی بنایا گیا ہے جس کا رقبہ معلوم ہے اور جو ن اور ق میں سے گزرتا ہے اور شکلاً اور وضعاً دیئے ہوئے ہلیلجی کے متشابہ ہے ثابت کرو کہ اس ہلیلجی کے مرکز کا ظریق ہلیلجی ہے

[جیمس کالج ۱۸۸۸ء]

۱۷۹۔ ایک ہلیلجی کے محور اصغر کے سروں پر مماس کھینچے گئے ہیں ان میں سے ایک مماس ایک وترخاص کو ی پر ملتا ہے اور دوسرا مماس اس وتر خاص کے متعلقہ مرتب کو ف پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ی ف ہلیلجی کا مماس ہے،

[جیمس کالج ۱۸۸۸ء]

۱۸۰۔ ہلیلجی کے ایک نقطہ ن سے اُس امدادی دائرہ کا ایک مماس کھینچا گیا ہے جو محور اصغر کو قطر مان کر کھینچا جائے۔ یہ مماس ہلیلجی کے مرتب دائرہ

کو ق اور ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق، ن ر نقطہ ن کے ماسکی فاصلوں کے برابر ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۱۸۱- ایک ہلیلجی کے محاور دئے ہوئے ہیں ثابت کرو کہ منحنی پر کے نقاط عمل ذیل سے دریافت ہو سکتے ہیں۔ محوروں کو قطر مان کر دائرے کھینچو اور مرکز و سے ایک مستقیم خط کھینچو جو دائروں کو ن اور ق پر ملے، نقطہ ن میں سے ایک مستقیم خط قاطع محور کے متوازی کھینچو اور نقطہ ق میں سے ایک اور خط مزدوج محور کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ خط نقطہ ر پر ملتے ہیں، تب ر ہلیلجی پر واقع ہوگا

اگر نصف محوروں کے مجموعہ کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور و ن ق اس کو ص پر ملے تو ثابت کرو کہ ص ر نقطہ ر پر ہلیلجی کا عماد ہے

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۱۸۲- ن س ق اور ن سَ ر ایک ہلیلجی کے ماسکی وتر ہیں، ثابت کرو کہ ن پر کا مماس اور وتر ق ر محور اعظم کو ایسے دو نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو مرکز سے متساوی الفصل ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۱۸۳- ایک متوازی الاضلاع ایک ہلیلجی کے گرد

بنایا گیا ہے، اگر ایسے دائرے کھینچے جائیں جو متوازی الاضلاع کے ہر ایک ضلع کے سروں ہیں سے اور ہلیلجی کے ایک ماسکہ میں سے گذریں تو ثابت کرو کہ یہ سب دائرے مساوی ہیں،

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۴ء]

۱۸۴- ایک ہلیلجی کا مرکز، ایک مماس، محور اعظم کا طول، اور ایک مرتب پر کا ایک نقطہ سب دئے ہوئے ہیں، یہ معلوم کرو کہ اس کے مرتب کس طرح دریافت کئے جائیں۔ کن صورتوں میں عمل ناممکن ہوگا؟

[بترہوس ۱۸۸۶ء]

۱۸۵- ن نَ ایک ہلیلجی کا قطر ہے، اگر ن پر کا مماس مرتبوں کو دو نقطوں پر ملے اور ان نقطوں کو جداگانہ ہلیلجی کے ماسکوں کے ساتھ دو مستقیم خطوط کے ذریعہ ملایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ خط ایک دوسرے کو نَ کے معین پر قطع کرتے ہیں

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۱۸۶- ایک ہلیلجی کے دو مماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں نیز ہلیلجی کے کسی نقطہ ط میں سے ہلیلجی کا ایک وتر ط ر س کھینچا گیا ہے، مقطوعہ ر س کا وسطی نقطہ ص ہے، ق ض ہلیلجی کو نَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن نَ، س ط کے متوازی ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۸۷- ایک ہلیلجی کا قطر د دَ ہے، دو نقطے ق اور ر ہلیلجی پر لئے گئے ہیں، ق د، ر دَ نقطہ ن پر ملتے ہیں اگر ایک ہلیلجی ایسا بنایا جائے جس کا مرکز د ہو اور جو ن میں سے گزرے اور شکلاً اور وضعاً دیے ہوئے ہلیلجی کے متشابہ ہو تو ثابت کرو کہ یہ دَن اور دَق سے ایسے وتر قطع کرے گا جن کے قطر بالترتیب د ر اور د ق ہونگے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۱۸۸- ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا مماس محور اصغر کو ط پر ملتا ہے، اگر س ن ممدودہ پر عمود ط م نکالا جائے تو ثابت کرو کہ م کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۷ء]

۱۸۹- ایک ہلیلجی کے بیرونی نقطہ و سے خطوط و س اور و سَ کھینچے گئے ہیں جو و کو ماسکوں س اور سَ سے ملاتے ہیں اور منحنی کو بالترتیب نقاط ن اور ق پر قطع کرتے ہیں، نیز س ق اور سَ ن کو ملایا گیا ہے اور وہ ایک دوسرے کو ر پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ذوار بعۃ الاضلاع و ن ر ق کے اندر ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۳ء]

۱۹۰- اگر ایک ہلیلجی کے نقاط ن اور نَ کے

مماس امدادی دائرہ پر ملیں تو ثابت کرو کہ س ن، سَ نَ کے متوازی ہے

[ٹرنٹی ہوس ۱۸۸۶ء]

۱۹۱- ایک ہلیلجی کے ماسکوں سے ن پر کے مماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین ما اور مَا ہیں، اگر ن ل نقطہ ن پر کا معین ہو تو ثابت کرو کہ ن ل زاویہ مال مَا کی تنصیف کرتا ہے۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۶ء]

۱۹۲- ج ن، ج د ایک ہلیلجی کے مزدوج نیم قطر ہیں، ن گ نقطہ ن پر کا عماد ہے، مرکز ج سے ن پر کے مماس پر عمود ج ے نکالا گیا ہے، گ میں سے ج د کے متوازی خط گ م کھینچا گیا ہے جو نقطہ ن اور کسی ایک ماسکہ کو ملانے والے خط سے م پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن م خطوط ج ے، ج ب، ج د کا چوتھا تمناسب ہے۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۵ء]

۱۹۳- ایک ہلیلجی کے دو ماسکہ س اور سَ ہیں اور ہلیلجی کے محیط پر دو نقاط ن اور ق ہیں۔ ثابت کرو کہ خطوط س ن، س ق، سَ ن، سَ ق (ممدودہ بشرط ضرورت) ایک ہی دائرہ کے مماس ہیں۔

[کوین کالج ۱۸۸۶ء]

۱۹۴ - ہم ماسکہ ہلیلجی خطوط کا ایک سلسلہ معلوم ہے، اگر کسی ایک محور کے ایک ثابت نقطہ سے ہلیلجی خطوط کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس ایک دائرہ پر واقع ہونگے

[کوین کالج ۱۸۸۶ء]

۱۹۵ - ایک ہلیلجی کے ماسکوں سے ن پر کے مماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پائین صا اور صے ہیں، اگر صا اور صے پر امدادی دائرہ کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ن کے معین پر ملتے ہیں اور ان کے تقاطع کا طریق ایک ہلیلجی ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۶ - ایک ہلیلجی کے نقاط ن، نَ کے مماس ط پر ملتے ہیں اور انہی نقاط پر کے عماد محور کو گ، گَ پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ن گ۔ نَ گَ کے محاذی نقطہ ط پر مساوی زاوے بنتے ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۷ - ایک دائرہ کے ایک قطر پر دو ثابت نقطے ہیں جن کے فاصلے مرکز سے مساوی ہیں ایک شلجمی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے اور اس کا مرتب دائرہ کا ایک مماس ہے، ثابت کرو کہ اس کے ماسکہ کا طریق ایک ایسا ہلیلجی ہے جسکے ماسکے دو مذکورہ ثابت نقطے ہیں

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۱۹۸- ایک ہلیلجی کے محور اصغر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے اور ہلیلجی کے ایک قطر کے ایک سرے سے اس دائرہ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ مماس اور مزدوج قطر کے کسی ایک سرے کے ما بین کے فاصلے باہم ملکر ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔ جسکے اضلاع کا فرق نصف محور اعظم کے برابر ہے۔

[جیمس کالج ۱۸۸۷ء]

۱۹۹- ایک ہلیلجی کے اندر ایک ایسا مثلث بناؤ جو ایک دئے ہوئے مثلث کے متشابہ ہو۔

نوٹ۔ ہلیلجی مثلث مطلوب کے نقاط الزوایا میں سے گزرے گا۔

۲۰۰- ایک ہلیلجی کے دو مزدوج قطر امدادی دائرہ کو ن اور ق پر ملتے ہیں، اگر ن اور ق کے نظیری نقطے ہلیلجی پر نَ اور قَ ہوں تو ثابت کرو کہ نَ اور قَ پر کے مماس ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں

[جیمس کالج ۱۸۸۷ء]

۲۰۱- ج ا اور ج ب ایک ہلیلجی کے ثابت مزدوج قطر ہیں اور ج ن، ج ق متغیر مزدوج قطر ہیں ان، ب ق ایک دوسرے کو ل پر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ل کا طریق ایک ایسا ہلیلجی ہے جو شکلاً اور وضعاً مفروضہ ہلیلجی کا متشابہ ہے

[جیمس کالج ۱۸۸۸ء]

۲۰۲- طن، طنَ ہلیلجی کے دو مماس ہیں

اور ن گ ، نَ گَ نقاط ن ، نَ پر کے عماد ہیں،
اگر ط ن اور ط نَ پر بالترتیب ایسے نقطے ق
اور قَ لئے جائیں کہ ط قَ = ط گ اور ط ق =
ط گَ تو ثابت کرو کہ ق قَ = ۲ ن ی جہاں ی،
گ گَ کا نقطہ تنصیف ہے

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۲۰۳- اگر ایک مستطیل ایک ہلیلجی کے گرد بن سکے
تو ثابت کرو کہ اس کے قطروں کی سمتیں ہلیلجی کے مزووج
قطروں کی سمتیں ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۲۰۴- ایک ہلیلجی کا ایک ماسکہ س ہے اور ط ن،
ط ق اس کے دو مماس ہیں، ن ق ، اور س ط
ایک دوسرے کو لا پر قطع کرتے ہیں، ن ق کے
وسطی نقطہ ص سے س ط پر ایک عمود ص ما
نکالا گیا ہے۔
ثابت کرو کہ

ن ص^2 : ن لا × لا ق = س ما : س لا

۲۰۵- ایک ہلیلجی کے نیم محوروں ج ا ، ج ب
پر دو ایسے نقطے ط ، طَ لئے گئے ہیں کہ ط طَ ،
ا ب کے متوازی ہے ، اگر ط اور طَ سے ہلیلجی
کے دو متصل ربعوں پر مماس کھینچے جائیں تو

ثابت کرو کہ وہ مزوج قطروں کے متوازی ہونگے۔

[پمترہوس ۱۸۸۵ء]

۲۰۶۔ اگر ہلیلجی کے ماسکہ س میں سے ن پر کے مماس پر عمود س ما نکالا جائے تو ثابت کرو کہ س ما اور ج ن ایک دوسرے سے مرتب پر ملتے ہیں۔

[پمترہوس ۱۸۸۶ء]

۲۰۷۔ ن نَ ایک ہلیلجی کا قطر ہے، ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ہلیلجی کے نقطہ ق پر کا عماد زاویہ ن ق نَ کی تنصیف کرتا ہے

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۲۰۸۔ ایک ہلیلجی کا وتر ن ن، ا ج پر عمود ہے اور اس کو اتنا خارج کیا گیا ہے کہ یہ امدادی دائرہ کو نَ اور نَ، پر ملتا ہے، ن پر کا عماد ج نَ اور ج نَ، کو بالترتیب قَ اور قَ، پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ
ن قَ = ن قَ، = ج د اور نَ قَ = ب ج

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۲۰۹۔ ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا مماس محور اعظم کو ط پر ملتا ہے، اگر قطر ج د، ن ط کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ

ط ن^2 + ج د^2 = س ط × ط ح

جہاں ح اور س ہلیلجی کے ماسکے ہیں۔

۲۱۰- اگر ہیلیلجی پر کوئی نقطہ ن ہو اور ماسکی فاصلہ س ن مزدوج قطر کو ع پر ملے تو ثابت کرو کہ ج ن اور س ع کے مربعوں کا فرق مستقل ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۱- ایک ہیلیلجی پر دو ثابت نقطے ق، ر اور ایک متغیر نقطہ ن لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ مثلث ن ق ر کے مرکز عمودی کا طریق ایک متشابہ ہیلیلجی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۲- دو ہیلیلجی خطوں کا ایک ماسکہ مشترک ہے اور ان کے محور اعظم مساوی ہیں، اگر ایک ہیلیلجی اپنے ماسکہ کے گرد اپنی سطح میں چکر لگائے تو ثابت کرو کہ اس کا اور دوسرے ہیلیلجی کا وتر تقاطع ایک ایسی تراش مخروطی کو لمس کرے گا جو آخر الذکر ہیلیلجی سے ہم ماسکہ ہوگی

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۳- ایک ہیلیلجی کے نقطہ ر سے دو وتر رق اور رقَ مزدوج قطروں ج ن اور ج د کے متوازی کھینچے گئے ہیں، ر پر کا مماس ق قَ ممدودہ کو ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

رقَ² / قَ ط : رقَ'² / قَ' ط = ج ن² : ج د'²

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۴- دو ہم مرکز ہلیلجی دئے ہوئے ہیں، انکا محور اعظم ایک ہی ہے اور ان کے نصف محور اصغر ج ب اور ج ب' ہیں، پہلے ہلیلجی پر کے کسی نقطہ ن کا معین دوسرے ہلیلجی کو نقطہ ن' پر ملتا ہے ثابت کروکہ

ج ن² - ج ب² : ج ن'² - ج ب'² = ج ا² - ج ب² : ج ا² - ج ب'²

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۱۵- ہلیلجی خطون کا ایک سلسلہ بنایا گیا ہے، سب کے محور اعظم مساوی ہیں اور سب کے سب ایک ثابت مشترک نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور ایک ثابت مشترک ماسکہ رکھتے ہیں۔ ثابت کروکہ اس سلسلہ کے دو متصل ہلیلجی اُس متحرک ماسکی وتر پر ایکدوسرے کو قطع کرتے ہیں جو ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے، نیز ثابت کروکہ ان کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک ایسا ہلیلجی ہے جس کے ماسکے وہ ثابت نقطہ اور ثابت ماسکہ ہیں۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۶- ایک ہلیلجی کے مزدوج قطرون کے سرون پر مماس ط ن، ط ق کھینچے گئے ہیں، س ماسکہ

ہے اور ط ر، س ن پر عمود ہے، ثابت کرو کہ ط ر نصف محور اصغر کے برابر ہے

[کیز کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۷۔ ایک ہلیلجی کا ایک ماسکہ اور ایک مماس بلحاظ مقام معلوم ہیں نیز اسکے محور اصغر کا طول معلوم ہے، ثابت کرو کہ اس کے مرکز کا طریق ایک مستقیم خط ہے

[کیز کالج ۱۸۸۵ء]

۲۱۸۔ ایک دیا ہوا مستقیم خط اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا ایک سرا ہمیشہ ایک دائرہ کے محیط پر ہوتا ہے اور دوسرا سرا دائرہ کے ایک ثابت قطر پر۔ اگر دائرہ کا نصف قطر اس خط کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ خط پر کا ہر ایک نقطہ ایک ہلیلجی مرتسم کرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ہر ایک ہلیلجی کے نصف محوروں کا مجموعہ اس دائرہ کے قطر کے مساوی ہے۔

[ترنیتی ہوس ۱۸۸۶ء]

۲۱۹۔ ن ق ہلیلجی کا ایک وتر ہے اور ر اُس قطر ج ر کا سرا ہے جو ن ق کی تنصیف کرتا ہے، ن، ق، ر کے مقابل امدادی دائرہ پر نَ، قَ، رَ نظیری نقطے ہیں، ثابت کرو کہ رَ قوس نَ قَ کا وسطی نقطہ ہے، اگر ج رَ ہلیلجی کو ط پر قطع کرے اور اس کے مقابل امدادی دائرہ پر نظیری نقطہ طَ ہو تو ثابت کرو کہ

ج ط، ن ق پر عمود ہے

[ک سنہ ۱۸۸۵]

۲۲۰- ایک ہلیلجی کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے محور اعظم پر معین ط ن نَ ل کھینچا گیا ہے جو ہلیلجی کو ن پر اور ط پر کے مماسون کے وتر تماس کو نَ پر اور محور اعظم کو ل پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

ل ن^2 = ل نَ × ل ط

۲۲۱- دو ثابت نقطے ا اور ب دئے ہوئے ہیں، کئی ایک ہلیلجی خط جن کا خروج المرکز معلوم ہے ا میں سے گذرتے ہیں، نقطہ ا پر ہر ایک ہلیلجی کا عماد ا ب ہے اور ہر ایک کا محور ب میں سے گذرتا ہے، ماسکون کے طریق دریافت کرو

[کیتھرین کالج سنہ ۱۸۶۱]

۲۲۲- ایک ہلیلجی کے ثابت قطر کا معین ن ل ہے، ن ل پر (یا بشرط ضرورت ن ل ممدودہ پر) ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ ل ق کو ل ن سے وہی نسبت ہے جو ن ل کے مزدوج قطر کو ن ل کے متوازی قطر سے ہے، ثابت کرو کہ ق کا طریق ہلیلجی ہے، اِسکے محورون کے مقام دریافت کرو۔

[پیٹر ہوس سنہ ۱۸۶۱]

۲۲۳- ایک ہلیلجی پر دو نقطے ن اور ق ایسے ہیں کہ

انکے فصلوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کرو کہ ن اور ق پر کے مماسوں کا نقطہ تقاطع ایک ایسا ہلیلجی ہے جو شکلاً اور وضعاً دئے ہوئے ہلیلجی کا تشابہ ہے اور جو اس ہلیلجی کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

[کینز کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۴۔ ایک ہلیلجی کے وتر خاص کے ایک سرے خ پر مماس ط ماخ ہے کھینچا گیا ہے جو محور اعظم کو ط پر اور امدادی دائرہ کو ما ہے پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ نسبت ماخ کو ما ہے سے وہی نسبت ہے جو وتر خاص کو دو چند محور اعظم سے ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۵۔ ایک ہلیلجی کے نقاط ن اور ق پر مماس طن، طق کھینچے گئے ہیں، جو ہم ماسکہ ہلیلجی ط میں سے گذرتا ہے اس کے نقطہ ط پر کا مماس طص، ن ق ممدودہ کو ص پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ

$$\text{ص ن : ص ق = ط ن : ط ق}$$

[ترنتی کالج ۱۸۶۱ء]

۲۲۶۔ اگر ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر عماد ن گ نکالا جائے جو ایک محور کو گ پر ملے اور ن گ نقطہ ن کے ایک ماسکی فاصلہ کے مساوی ہو تو

ثابت کروکہ ن گَ نقطہ ن کے دوسرے ماسکی فاصلہ کے برابر ہوگا، اس میں گَ وہ نقطہ ہے جہاں عماد دوسرے محور کو ملتا ہے۔
[پیرہوس ۱۸۶۱ء]

۲۲۷۔ ایک شلجمی پر کے نقطہ ن سے مرتب پر عمود ن م نکالا گیا ہے، ثابت کروکہ ا ن اور س م کا نقطۂ تقاطع ایک ہلیلجی ہے، اس میں ا منحنی کا راس ہے اور س ماسکہ۔
[کلیرکالج ۱۸۹۲ء]

۲۲۸۔ دو ہلیلجی خطوں کے محور اصغر مساوی ہیں اور ان کا ایک ماسکہ مشترک ہے، اس کو ہندسی طریق سے ثابت کروکہ اگر انکے مشترک مماسون کے نقاط تماس کو مستقیم خطون کے ذریعہ ملایا جائے تو ان خطون کے جو مزدوج قطر ہونگے وہ منحنیات کے اعظم محورون کے متناسب ہوں گے۔
[کلیرکالج ۱۸۸۲ء]

۲۲۹۔ ایک ہلیلجی کے ماسکے س، سَ ہیں اور اس پر دو نقطے ن، ق ہیں۔ ماسکہ سَ سے ن اور ق پر کے مماسون پر عمود نکالے گئے ہیں اور یہ عمود س ن، س ق ممدودہ سے بالترتیب نَ اور قَ پر ملتے ہیں، ن ق اور نَ قَ کا نقطہ تقاطع ر ہے، ثابت کروکہ سَ ر مثلث ن سَ ق کے خارجی زاویہ کی تنصیف کرتا ہے۔

۲۳۰۔ ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور سَ ہیں اور مرکز ج، ن پر کے مماس پر عمود س ما، سَ ما سے نکالے گئے

ہیں، س ن، سَ ہے ممدودہ ایکدوسرے کو ط پر ملتے ہیں، طج اور ماس ممدودہ ایک دوسرے کو ق پر ملتے ہیں اور اگر طق ما کے گرد ایک دائرہ بنایا جائے تو طس ممدودہ اس کو ر پر ملتا ہے، ثابت کروکہ ر کا طریق ایک دائرہ ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۳ء]

۲۳۱۔ اگر ایک ہلیلجی کے کسی نقطہ ن سے وتر ن ق، ن قَ محوروں کے متوازی کھینچے جائیں تو ثابت کروکہ ن پر کا عماد ق قَ کو ایک مستقل نسبت میں قطع کرتا ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۳۲۔ کسی ایک نقطہ ط سے ایک ہلیلجی کے مماس طن، طق کھینچے گئے ہیں، اگر ن طق کا منصف ایک ثابت نقطہ د میں سے گذرے جو محور اعظم پر واقع ہو تو ثابت کروکہ ط کا طریق ایک دائرہ ہے

[جیسس کالج ۱۸۸۲ء]

۲۳۳۔ ایک ہلیلجی کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے ہلیلجی کے دو مماس طن، طق کھینچے گئے ہیں، ثابت کروکہ ذواربعۃ الاضلاع س سَ ن قَ کے دو اضلاع متوازی ہیں، نیز ثابت کروکہ اگر اس کے قطروں کا نقطہ تقاطع د ہو تو زاوئے ج طن، د طق مساوی ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۲۳۴- ایک ہلیلجی کے دو نقطوں ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو ایک ہم مرکز دائرہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ن ق ایک ہم مرکز اور ہم محور ہلیلجی کو مس کرتا ہے اور اس ہلیلجی کے محوروں کی باہمی نسبت پہلے ہلیلجی کے محوروں کی نسبت مثناۃ کے برابر ہے، اور ثابت کرو کہ ن ق کا نقطہ تماس (اپنے لفافہ کے ساتھ) ن ق کی کبھی تنصیف نہیں کرتا سوائے اُس صورت کے جبکہ ن ق ان دو ہلیلجی خطوں کے محور پر عمود ہو

[جیمس کالج ۱۸۸۶ء]

۲۳۵- ایک ثابت دائرہ پر ایک نقطہ ن ہے، خط ن ل کو ایک دی ہوئی سمت میں کھینچا گیا ہے اور اس کا طول مستقل ہے۔ نیز اگر ن ل کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو وہ دیئے ہوئے دائرہ کو ق پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ن ق ہمیشہ ایک ثابت ہلیلجی کو مس کرتا ہے۔

[جیمس کالج ۱۸۸۶ء]

۲۳۶- اگر ایک ہلیلجی کے ایک ماسکی وتر کے متوازی ایک قطر کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ماسکی وتر، محور اعظم اور اس قطر کا تیسرا متناسب ہے۔

جیمس کالج ۱۸۸۶ء

۲۳۷- ن س ق ایک ہلیلجی کا ماسکی وتر ہے اور ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو ے پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

س ےَ۲ + ب ج۲ : ۲ س ےَ = ج ا : ن ق

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۲۳۸- اگر ایک ہلیلجی کے مزدوج نقطوں ن اور د پر کے عماد ایک دوسرے کو ع پر ملیں تو ثابت کرو کہ ج ع ن د پر عمود ہے

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۲۳۹- ایک ایسا دائرہ کھینچا گیا ہے جو ایک ہلیلجی کے ماسکوں اور محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے اور منحنی کو ن اور ق پر ملتا ہے، اگر ن اور ق پر کے مماسوں پر مرکز سے عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ان میں سے ہر ایک عمود ماسکہ اور مرکز کے درمیانی فاصلہ کے برابر ہے

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۰- دو دائرے دئے ہوئے ہیں، ایک کا نصف قطر دوسرے کا دو چند ہے اور چھوٹا دائرہ بڑے دائرے کے اندر محیط پر پھرایا جاتا ہے، ثابت کرو کہ پھرنے والے دائرے کے رقبہ پر کا کوئی نقطہ ایک ہلیلجی مرتسم کرتا ہے نیز ثابت کرو کہ جو ہلیلجی ایک نصف قطر کا وسطی نقطہ

مرتسم کرتا ہے اور جو ہلیلجی مذکور نصف قطر ممدودہ کا وہ نقطہ مرتسم کرتا ہے جو لڑھکنے والے دائرہ کے مرکز سے اسکے قطر کے فاصلہ پر واقع ہو دونوں متشابہ منحنی ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۱- ایک ہلیلجی کے دو متوازی مماس اس کو ن اور ق پر مس کرتے ہیں، نقطہ ر پر ایک اور مماس ان کو ط اور طَ پر کاٹتا ہے اور ن طَ اور ق ط ایک دوسرے کو ص پر قطع کرتے ہیں۔ ثابت کرو کہ رص، ن ط اور می کاَ کے متوازی ہے اور اُنکی نصف موسیقی اوسط کے برابر ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۲- ہلیلجی کے مرتب دائرہ کی ہستی کو ثابت کرو اور ثابت کرو کہ ہلیلجی کا مرتب خط، اسکے مقابل کے ماسکہ پر کے نقطی دائرہ اور مرتب دائرہ کا محور اصلی ہے

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۲۴۳- ایک ہلیلجی کے مرکز ج سے ن پر کے مماس پر عمود ج ک کھینچا گیا ہے اور دائرہ ن ک ب محور اعظم کو م پر ملتا ہے؛ اگر م کو مرکز اور ج ب کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے اور وہ محور اصغر کو نقاط ل اور لَ پر کاٹے تو ثابت کرو کہ شکل م ل گ لَ کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے۔

[پیتر ہوس ۱۸۸۴ء]

۲۴۴- ایک ہلیلجی دو ثابت نقطوں ا اور ب میں سے گذرتا ہے اور وہ شکلاً اور وضعاً ایک ثابت ہلیلجی کے متشابہ ہے جسکو یہ ج اور د پر کاٹتا ہے، اج، اد ثابت ہلیلجی کو دوبارہ ع اور ف پر کاٹتے ہیں، ثابت کرو کہ خطوط ج د، ع ف میں سے ہر ایک ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[پٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۲۴۵- ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور ح ہیں، ط ن اور ط ق ہلیلجی کے دو مماس ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں نیز ط م، س ن پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

$$س ط \times ح ط = ۲ ط م \times ا ج$$

[پٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۲۴۶- دو ہم ماسکہ ہلیلجی دئے ہوئے ہیں، بیرونی ہلیلجی کے نقطوں سے اندرونی ہلیلجی کے مماس کھینچے گئے ہیں، وتر تماس کا لفاف دریافت کرو۔

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۷- ایک ہلیلجی کے محور اعظم پر ایک ثابت نقطہ ہے اور اس میں سے ہلیلجی کا ایک وتر گذرتا ہے، اس وتر کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ہلیلجی اور دائرہ کے باقی دو نقاط تقاطع کو ملانے والا وتر محور اعظم پر کے ایک

اور ثابت نقطہ میں سے گذرتا ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۸- ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور سَ ہیں اور اس کا محور اعظم اا َ ہے، ا ر اور اَ رَ بالترتیب س ن اور سَ ن کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور وہ ن پر کے مماس کو ر اور رَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ

ان + اَ رَ = اا َ

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۲۴۹- ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا مماس اور عماد محور اعظم کو بالترتیب ط اور گ پر ملتے ہیں، اگر گ ط جیسے مقطوعات کو قطر مان کر دائرے کھینچے جائیں۔ تو ثابت کرو کہ ان سب کا ایک ہی محور اصلی ہو گا۔

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۰- دو ہلیلجی ایک ہی سطح میں واقع ہیں اور ان کا ایک ماسکہ مشترک ہے، ایک ہلیلجی اس مشترک ماسکہ کے گرد چکر لگاتا ہے اور دوسرا اپنی جگہ قائم رہتا ہے، ثابت کرو کہ ان کے مشترک مماسوں کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۱- ایک ہلیلجی کے ایک راس سے ن پر کے مماس پر عمود اق کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ن س اور

ق ا ممدودہ کے نقطہ تقاطع کا طریق ایک دائرہ ہے، اس میں س ہلیلجی کا ایک ماسکہ ہے۔

[تزنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۲۔ ایک ہلیلجی کے محیط پر ایک نقطہ ن ہے اور س اور سَ اس کے ماسکے ہیں، ہلیلجی کے مرکز میں سے میں دو مساوی اور مستقل خط س ن اور ن سَ کے متوازی کھینچے گئے ہیں اور متوازی الاضلاع کی تکمیل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ اس متوازی الاضلاع کے چوتھے نقطۂ راس کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[تزنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۳۔ ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور ح ہیں اور محور اعظم ممدودہ پر کوئی نقطہ ط ہے، س ح کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، نیز ایک اور دائرہ کھینچا گیا ہے جو پہلے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے اور محور اعظم سے نقطہ ط پر زاویہ قائمہ بناتا ہے، ثابت کرو کہ دوسرا دائرہ ہلیلجی کو ان دو نقطوں پر ملتا ہے جہاں نقطہ ط کا قطبی خط (بلحاظ ہلیلجی کے) ہلیلجی کو ملتا ہے

۲۵۴۔ ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا عماد محوروں کو گ اور گَ پر ملتا ہے، اگر مرکز سے ن پر کے مماس پر عمود ج ک ہو اور ج گ، ج گَ کے نقاط تنصیف و اور وَ ہوں تو ثابت کرو کہ

وب = وک = ون اور
وَا = وَک = وَن

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۵- ایک ہلیلجی کے ماسکون س اور ح سے ایک مماس پر عمود س ما اور ح مَا نکالے گئے ہیں اور جہاں محور اعظم نظیری مرتبوں کو ملتا ہے وہ نقاط لا اور لَا ہیں، ثابت کرو کہ لاما اور لَامَا ایک دوسرے کو محور صغیر پر قطع کرتے ہیں

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۶- ایک کاغذ پر ایک ہلیلجی بنا ہوا ہے، معلوم کرو کہ اس کے اصلی محاور کسطرح دریافت کیئے جائیں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۷- ایک ہلیلجی کے محور اعظم کے ایک سرے پر ایک مماس کھینچا گیا ہے اور اُس پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے، اگر نقطہ ن سے ہلیلجی کا دوسرا مماس ن ط کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ ن ط، ن ا سے زیادہ لمبا ہے۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۲۵۸- دو ہلیلجی شکلاً اور وضعاً متشابہ ہیں ان کے مرکز بالترتیب ج اور جَ ہیں اور وہ ایک دوسرے کو راس ا پر مس کرتے ہیں، نقطہ ا میں سے ایک وتر کھینچا گیا ہے جو ہلیلجی خطوں کو ن اور ق پر بالترتیب ملتا ہے، نیز ن ج

اور ق جَ ایک دوسرے کو ر پر قطع کرتے ہیں، ر کا طریق دریافت کرو۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۲۵۹۔ ایک ہلیلجی کے امدادی دائرہ پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے ہلیلجی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں جو منحنی کو ن اور ق پر مس کرتے ہیں، اگر ان نقطوں میں سے گزرنے والے قطر ن ن، ق ق، ہوں تو ثابت کرو کہ ن ق، ق ن، ہلیلجی کے ماسکی وتر ہیں۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۲۶۰۔ ایک ہلیلجی کے محیط پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے، ایک ایسا مثلث بنایا گیا ہے جس کے نقاط راس نقطہ مذکورہ، ہلیلجی کا مرکز اور ہلیلجی کا ایک ماسکہ ہیں، ثابت کرو کہ اس مثلث کے مرکز ثقل کا طریق ایک متشابہ ہلیلجی ہے۔

[ترنٹی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۶۱۔ ایک ہلیلجی کے محور اعظم کے سروں پر مماس کھینچے گئے ہیں اور وہ ہلیلجی کے کسی نقطہ پر کے مماس کو ر اور رَ پر ملتے ہیں، ر رَ کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ یہ ہلیلجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے،

[ترنٹی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۶۲۔ ایک ہلیلجی کے محور اعظم پر دو ثابت نقطے لئے گئے ہیں، ایک نقطہ میں سے ایک خط سَ ن کے متوازی

کھینچا گیا ہے اور دوسرے نقطہ میں سے ماس اور ماسَ کے متوازی خطوط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ آخری دو خط پہلے خط کو ایسے دو نقطوں پر ملتے ہیں جو ایک ثابت دائرہ کے ایک قطر کے سرے ہیں۔

[ترنٹی ہال ۱۸۸۵ء]

۲۶۳- ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا عماد محوروں کو گ اور گ۱ پر ملتا ہے، گ، گ۱ کے قطر پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے نیز ن کو مرکز مان کر ایک اور دائرہ بنایا گیا ہے جو پہلے دائرہ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے اور خط ن گ گ۱ کو قَ اور قَ پر، ثابت کرو کہ مثلثیں س ن ق اور سَ ن قَ متشابہ ہیں۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۴- ایک دئے ہوئے دائرہ کے کسی نقطہ ق سے دائرہ کے ایک ثابت مماس پر عمود ق ر نکالا گیا ہے اور ق ر کو نقطہ ن پر اس طرح تقسیم کیا گیا ہے کہ ق ن: ن ر ایک دی ہوئی نسبت کے برابر ہے، ثابت کرو کہ ن کا طریق ایک ہلیلجی ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۲۶۵- اگر ایک ہلیلجی کے اوتار خاص میں سے گزرنے والے قطر ایک دوسرے کے مزدوج ہوں تو ثابت کرو کہ ماسکوں کو ملانے والے خط کے محاذی محور اصغر کے سروں پر زاویئے

قائمے بنتے ہیں۔

[کوین کالج سنہ ۱۸۸۵]

۲۶۶۔ ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا عماد محور اصغر کے ایک سرے میں سے گذرتا ہے، اگر ماسکوں کو ملانے والے خط کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا جائے تو ثابت کرو کہ یہ دائرہ ہلیلجی کے ن پر کے مماس کو مس کرے گا

[کوین کالج سنہ ۱۸۸۵]

۲۶۷۔ ایک دائرہ ہلیلجی کے ماسکہ س میں سے گذرتا ہے اور ہلیلجی کو دو ایسے نقطوں ن اور ق پر مس کرتا ہے جو بلحاظ محور کے متشاکل ہیں، ثابت کرو کہ

س ن = س ق = وتر خاص

[کیتھرین کالج سنہ ۱۸۸۵]

۲۶۸۔ ذیل کے مسئلہ کا ظلّی مسئلہ دریافت کرو۔

اگر ایک دائرہ کے دو نصف قطر و ا اور و ب ایکدوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں اور و ا ممدودہ اور و ب ممدودہ پر بالترتیب نقطے ن اور ق لئے جائیں تو ن ب اور ق ا کا نقطہ تقاطع دائرہ کے محیط پر واقع ہوگا اگر سطح ا ن × ب ق نصف قطر کے مربع کے دو چند کے برابر ہو [جون کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۶۹- ایک ہلیلجی کے نصف محور ج ا اور ج ب ہیں اگر مستطیل ا ج ب ص کی تکمیل کی جائے اور منحنی س ص کی تنصیف کرے تو ثابت کرو کہ

$$\text{ا ج}^2 + \text{ب ج}^2 = ۲\ \text{ا ج} \times \text{ج س}$$

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۲۷۰- ہلیلجی کے ماسکہ میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو محور پر عمود ہے، اس خط پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے ہلیلجی کے دو مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نظیری مرتب کا جو مقطوعہ ان مماسوں کے درمیان واقع ہوتا ہے محور اسکی تنصیف کرتا ہے

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۲۷۱- ن س ق، ن ح ر ایک ہلیلجی کے ماسکی وتر ہیں، نقاط ق اور ر پر مماس ق ط، ر ط کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ن پر کا مماس ن ط ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۲۷۲- ایک ہلیلجی کے نقاط ن اور ق پر کے مماس ط ن اور ط ق ہیں، ان کے متوازی نصف قطر بالترتیب ج ن اور ج ق ہیں، ط ن اور ن ج (جن کو بشرط ضرورت بڑھایا جاسکتا ہے) ایکدوسرے سے ل پر ملتے ہیں اور ط ق، اور ق ج نقطہ م پر ملتے ہیں۔ ن م اور ق ل کو بڑھایا گیا ہے اور

وہ ایک دوسرے کو ص پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط ج ص ایک مستقیم خط ہے۔

[پیٹر ہوس سنہ ۱۸۸۴]

۲۷۳- ایک دائرہ اور ایک ہلیلجی کا ایک مشترک قطر ہے، اس قطر پر ایک نقطہ لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے دائرہ اور ہلیلجی دونوں کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ نقاط تماس کو ملانیوالے خط ایک ثابت خط کے متوازی ہیں۔

[کلیر کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۷۴- ہلیلجی خطوں کا ایک سلسلہ ہے، اس سلسلہ کے سب خطوں کا مرکز مشترک ہے اور انکے دو مزدوج قطروں کی سمتیں دی ہوی ہیں، نیز ان کے محوروں کے مربعوں کا مجموعہ مستقل ہے، ثابت کروکہ وہ سب کے سب چار مستقیم خطوں کو مس کرتے ہیں

[کلیر کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۷۵- ایک دئے ہوئے نقطہ و میں سے ایک ہلیلجی کا وتر ون ق کھینچا گیا ہے، سطح ون×وق کی اقل اور اعظم قیمتیں دریافت کرو

۲۷۶- ایک ہلیلجی پر تین نقطے ن، ق، ر لئے گئے ہیں اور اسکا مرکز ج ہے، قطر اج اَ، ن ق کی تنصیف کرتا ہے اور رن، رق اسکول اور

ط پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ج ل × ج ط = ج ا^2

[تھرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۲۷۷ - ایک ہلیلجی کا ایک ماسکی وتر کھینچا گیا ہے اور وتر کے سروں کے مقابل امدادی دائرہ پر جو نقطے ہیں ان کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملا دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ یہ خط اُس قطر کے مساوی ہے جو ماسکی وتر کے متوازی ہے۔

[تھرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۲۷۸ - معلوم کرو کہ ایک دیئے ہوئے ہلیلجی میں ایک خاص طول کا ماسکی وتر کس طرح کھینچا جا سکتا ہے، اگر دو وتر ن ق اور نَ قَ اسطرح کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ن نَ ق قَ کے گرد ایک دائرہ کھینچ سکتا ہے۔

[تھرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۲۷۹ - اگر ایک ہلیلجی کے اندر ایک ایسا مثلث بن سکے جس کا مرکز ثقل ہلیلجی کے مرکز پر ہو تو ثابت کرو کہ یہ بڑے سے بڑا مثلث ہے جو منحنی کے اندر بن سکتا ہے۔

[تھرنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۰ - اگر ایک ہلیلجی کا عماد ن گ، ب میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ ب گ ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کا نصف ہے

[پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۱۔ اگر ایک ہلیلجی کا ایک ماسکہ، ایک مماس اور اس کا نقطہ تماس تینوں معلوم ہوں تو اس کے مرکز کا طریق دریافت کرو

[کینز کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۸۲۔ ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور ح ہیں اور اس کے دو مماس ط ق، ط قَ ہیں۔ طر، طرَ کو بالترتیب ط س، ط ح کے مساوی قطع کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ر رَ محور اعظم کے مساوی ہے اور اگر ط س، ر رَ کو ی پر قطع کرے تو ط ی، ط ق کے مساوی ہوگا۔

۲۸۳۔ ایک مستقیم خط کا طول معلوم ہے، اس کا ایک سرا ایک ایسے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے جس کا نصف قطر مستقیم خط کے طول کے برابر ہے اور اس کا دوسرا سرا دائرہ کے ایک ثابت قطر پر حرکت کرتا ہے، ثابت کرو کہ اس خط پر کا ہر ایک نقطہ ایک ہلیلجی مرتسم کرتا ہے، نیز ثابت کرو کہ ایسے ہر ایک ہلیلجی کے نصف محوروں کا مجموعہ دائرہ کے قطر کے برابر ہے۔

[موڈلن کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۸۴۔ اگر ایک ہلیلجی کے نقطہ ن پر کا مماس راس ا پر کے مماس کو ط پر ملے اور نقطہ ا سے

ہلیلجی کا بعیدتر ماسکہ سَ ہو تو ثابت کرو کہ ط ا اس عمود کے برابر ہے جو ط سے سَ ن پر نکالا جائے۔

[کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۵- ایک ہلیلجی پر کے دو مزدوج نقطوں ن اور د پر مماس کھینچے گئے ہیں اور ان مماسوں پر مرکز سے عمود ج ما ، ج مَا نکالے گئے ہیں، اگر د ج ممدودہ ہلیلجی کو دوبارہ نقطہ دَ پر ملے تو ثابت کرو کہ ن دَ اس دائرہ کا قطر ہے جو مثلث ما ج مَا کے گرد بن سکتا ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۶- ایک ہلیلجی کا امدادی دائرہ دیا ہوا ہے اور ہلیلجی کا ایک مماس معلوم ہے جو منحنی کو ایک دئے ہوئے نقطہ پر مس کرتا ہے ہلیلجی کے ماسکے دریافت کرو

[کیتھرین کالج ۱۸۸۴ء]

۲۸۷- ایک ہلیلجی کا محور اعظم ا اَ ہے، اگر منحنی کے کسی نقطہ پر کے مماس پر ماسکوں سے عمود س ما اور سَ مَا نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ ا ما اور اَ مَا کے نقطہ تقاطع کا طریق ہلیلجی ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۲۸۸- ق ص قَ قطر ج ن کا دُگنا معین ہے، ہلیلجی کے مرکز ج سے ق قَ پر عمود نکالا گیا ہے

اور یہ امدادی دائرہ کو ل پر ملتا ہے، ج میں سے ایک خط ن ل کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ص میں سے گذرنے والے خط کو جو ق ق پر عمود ہو نقطہ و پر ملتا ہے، اگر ایک ایسا ہلیلجی کھینچا جائے جو ق اور قَ میں سے گذرے اور جس کا مرکز و ہو اور محور اعظم دئے ہوئے ہلیلجی کے محور اعظم کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ اس کا محور اصغر د ج دَ کے مساوی ہوگا۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۲۸۹۔ ایک ہلیلجی کے ماسکون س اور ح میں سے دو خط ن س نَ اور ق ح قَ کھینچے گئے ہیں جو دو مماسوں ن ق، نَ قَ کو ملتے ہیں، نیز ن نَ، ق قَ کی تنصیف بالترتیب س اور ح پر ہوتی ہے، ثابت کرو کہ ذوار بعتہ الاضلاع ن قَ قَ نَ کے گرد ایک دائرہ بن سکتا ہے۔

[جیمس کالج ۱۸۸۴ء]

نوٹ۔ مماس ن اور نَ پر کھینچے گئے ہیں۔

۲۹۰۔ ایک ہلیلجی میں گ اور ج سے ج ن اور ن پر کے مماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور وہ ایکدوسرے کو ح پر ملتے ہیں، اگر ج ح کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو وہ ن پر کے مماس کو ل پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر محور اصغر کو قطر مان کر ایک دائرہ

بنایا جائے اور نقطہ ن سے اس دائرہ کا مماس کھینچا جائے تو ج ل اس مماس کے برابر ہوگا۔

[جیسس کالج سنہ ۱۸۸۴]

۲۹۱- ایک ہلیلجی کے ایسے مماسوں کا نقطہ تقاطع جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں ایک دائرہ ہوتا ہے۔

[جیسس کالج سنہ ۱۸۸۴]

اگر ن پر کا مماس اس دائرہ کو ط پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ جو زاوئے ط ن کے محاذی ہلیلجی کے ماسکوں پر بنتے ہیں وہ ایکدوسرے کے متمم ہیں۔

۲۹۲- اگر ایک دائرہ ہلیلجی کے ماسکوں میں سے کھینچا جائے تو وہ منحنی کو نقاط ن اور ق پر محور کے مقابل کی جانبوں میں قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ اُن عمودوں کے مربعوں کا مجموعہ جو مرکز سے ن اور ق پر کے مماسوں پر نکالے جائیں اج کے مربع کے مساوی ہے۔

[جون کالج سنہ ۱۸۸۳]

۲۹۳- ایک ہلیلجی کے ماسکوں س اور ح میں سے س ن اور ح ن پر بالترتیب عمود س و اور ح وَ نکالے گئے ہیں اور یہ ن پر کے عماد سے و اور وَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ محور اصغر و وَ کی تنصیف کرتا ہے۔

[پیٹر ہوس سنہ ۱۸۸۳]

ہُذلُولی

۲۹۴- ایک ہذلولی کے محور اج اَ، ب ج بَ بلحاظ مقدار اور مقام کے معلوم ہیں، ہندسی طریق سے ایسے مزدوج قطروں ن ج نَ، د ج دَ کا ایک زوج دریافت کرو جن کا درمیانی زاویہ ایک دئے ہوئے زاویہ کے برابر ہو

[آئی - سی - ایس سنہ ۱۸۸۶]

۲۹۵- ایک ہذلولی میں ایک مستقیم خط مزدوج قطروں کے ایک زوج کو ن اور د پر کاٹتا ہے اور ایک دوسرے زوج کو نَ اور دَ پر، اگر خط کے اُس مقطوعہ کا نقطہ تنصیف و ہو جو متقاربوں کے درمیان ہے تو ثابت کرو کہ

و ن × و د = و نَ × و دَ

[آئی، سی، ایس سنہ ۱۸۸۶]

۲۹۶- ایک ہذلولی کا ایک ماسکہ، ایک مماس اور مزدوج محور تینوں معلوم ہیں ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک مستقیم خط ہے،

[آئی، سی، ایس سنہ ۱۸۸۵]

۲۹۷- اگر ایک ہذلولی کے دو مماس ایک دوسرے کو

مزدوج ہذلولی کی ایک شاخ پر قطع کریں تو ثابت کرو کہ انکا وتر تماس دوسری شاخ کو مس کرتا ہے

[آئی، سی، ایس سنہ ۱۸۸۵]

۲۹۸- ایک ہذلولی پر کے کسی نقطہ ن سے محور پر معین ن ل کھینچو، نقطہ ل میں سے ا ن کے متوازی خط ل ق کھینچو جو ج ن کو ق پر ملے، ثابت کرو کہ ا ق، ن پر کے مماس کے متوازی ہے۔

[آئی - سی - ایس سنہ ۱۸۸۴]

۲۹۹- ایک مثلث متساوی الاضلاع کے دو نقاط ر، ۲ بالترتیب ایک ہذلولی کے مرکز اور ماسکہ ہیں اور مثلث کا ایک ضلع منحنی کا متقارب ہے، معلوم کرو کہ باقی دو اضلاع کو منحنی کس جگہ کاٹتا ہے،

[آئی - سی - ایس سنہ ۱۸۸۳]

۳۰۰- اگر ایک مثلث کے دو اضلاع کی سمتیں دی ہوئی ہوں اور تیسرا ضلع ایک ثابت نقطہ میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ جو دائرے اس مثلث کے گرد بن سکیں اِن کے مرکزوں کا طریق ایک ہذلولی ہو گا۔

[آئی - سی - ایس سنہ ۱۸۸۳]

۳۰۱- ایک قائم ہذلولی کے ایسے وتر کو جس کے سرے مختلف شاخوں پر واقع ہیں قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، اگر دائرہ اور ہذلولی کے باقی نقاط

تقاطع سے اس وتر پر عمود نکالے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ ہذلولی کے مماس ہیں

[پیتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۳۰۲۔ ایک ہذلولی کے ایک مماس اور دو متقاربوں کے مقام دئے ہوئے ہیں، ہذلولی بنانے کی ترکیب معلوم کرو۔

[پیتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۳۰۳۔ ایک دائرہ اور ایک قائم ہذلولی ایک دوسرے کو ایسے چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو سب کے سب ایک شلجمی پر واقع ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ ہذلولی کا ایک محور شلجمی کے محور کے متوازی ہے، نیز ثابت کرو کہ ہذلولی (یا دائرہ) کا مرکز خواہ کوئی سا منحنی مرتسم کرے دائرہ (یا ہذلولی) کا مرکز ایک مساوی منحنی مرتسم کرے گا جبکہ مرکز اپنے جداگانہ منحنیات پر متقابل سمتوں میں حرکت کریں۔

[پیتر ہوس ۱۸۸۷ء]

۳۰۴۔ ایک شلجمی اور ایک قائم ہذلولی جس کا ایک متقارب شلجمی کا محور ہے دونوں ایک مثلث ن ق ل کے گرد بنائے گئے ہیں اور مثلث کے اضلاع شلجمی کے محور کو ن، ق، ل پر قطع کرتے ہیں، اگر شلجمی کا راس ا ہو اور ن کا معین ن ل، تو ثابت کرو کہ

ا ق + ا ر = ا ل

[پیٹر ہوس وغیرہ ۱۸۸۸ء]

۳۰۵- تین نقطوں میں سے کسی دو کو ماسکے مان کر ایک ہذلولی کھینچا گیا ہے جو تیسرے نقطہ میں سے گذرتا ہے ثابت کرو کہ تین ہذلولی جو اس طرح سے بنائے جا سکتے ہیں ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرتے ہیں

[ترنتی کالج ۱۸۸۸ء]

۳۰۶- اگر ایک تراش مخروطی ایک مثلث کے تین راسوں اور اس کے تین عمودوں کے نقطہ تقاطع میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ یہ قائم ہذلولی ہے، اگر ایسے قائم ہذلولی کھینچے جائیں تو ان کے مرکزوں کا طریق دریافت کرو

[لندن-بی-اے-اونرز ۱۸۷۲ء]

۳۰۷- ایک ہذلولی پر دو نقطے ن، ق لئے گئے ہیں، ن پر کا مماس اس خط کو جو ق میں سے ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو دوسرے متقارب پر واقع ہے، ثابت کرو کہ ق پر کا مماس، ن میں سے گذرنے والے خط کو جو دوسرے متقارب کے متوازی ہو پہلے متقارب پر قطع کرتا ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۸ء]

۳۰۸- ایک ہذلولی کاغذ پر بنا کر دیدیا گیا ہے، اس کے

متقارب، مزدوج محور اور قاطع محور دریافت کرو۔

[ترنتی ہال ۱۸۸۸ء]

۳۰۹۔ ایک ہذلولی کے متقارب دئے ہوئے ہیں اور منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہے، ماسکے، مرتبات اور راسین دریافت کرو۔

[سی، سی، سی ۱۸۸۸ء]

۳۱۰۔ ایک قائم ہذلولی کا مرکز ج ہے، ایک مستقیم خط ل ق ایک متقارب ج م کے متوازی کھینچا گیا ہے جو دوسرے متقارب کو ل پر ملتا ہے، زاویہ ق ج م کی تنصیف ایک ایسے خط سے کی گئی ہے جو ہذلولی کو ن پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ق تمناسب ہے ج ن^2 کے، اسمیں ق خط ل ق پر کا کوئی نقطہ ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۱۔ ایک قائم ہذلولی کے ماسکوں سے کسی نقطہ ن پر کے مماس پر عمود کھینچے گئے ہیں جو منحنی کو نقاط ک، ل، م، ف پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ک ل م ف ایک ایسا متوازی الاضلاع ہے جس کے دو اضلاع ن میں سے گذرنے والے قطر کے ساتھ زاوئے قائمے بناتے ہیں

[جیسس وغیرہ ۱۸۸۸ء]

۳۱۲۔ ایک ہذلولی پر کے تین نقطے اور ایک متقارب معلوم ہیں دوسرا متقارب کھینچو۔

۳۱۳- ایک ہذلولی پر کوئی نقطہ ن ہے اور اس کا قاطع محور ا اَ ہے اگر اَن اور ان ایک مرتب کو ع اور ف پر ملیں تو ثابت کرو کہ ع ف کے محاذی اسکے نظیری ماسکہ پر ایک زاویہ قائمہ بنتا ہے

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۴- ایک مربع کے دو اضلاع کو متقارب اور متقابل کے کونے کو ماسکہ مان کر ایک ہذلولی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ یہ باقی اضلاع کی تنصیف کرتا ہے

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۳۱۵- ایک ایسا ہلیلجی بنایا گیا ہے جسکے محور، اعظم اور اصغر دونوں ایک ہذلولی کے محوروں پر مقدار اور سمت میں منطبق ہوتے ہیں، کسی متقارب کے ایک نقطہ ط سے ہلیلجی کے مماس ط ق، ط قَ کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ط ق قَ کا بیرونی دائرہ (گرد بنا ہوا دائرہ) ہذلولی کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۷ء]

۳۱۶- ا ب ج د ایک مستطیل ہے دو ایسے قائم ہذلولی بنائے گئے ہیں جن کے متقارب مستطیل کے اضلاع کے متوازی ہیں اور جو بالترتیب نقاط ا، ج اور ب، د میں سے گذرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان ہذلولی خطوں کے مرکزوں کے قطبی بلحاظ ایکدوسرے کے

ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۳۱۷۔ ایک مثلث اب ج کی سطح میں ن ایک ایسا نقطہ ہے کہ اگر ا، ب، ج سے بالترتیب ن ب، ن ج، ن ا پر عمود نکالے جائیں تو وہ ایکدوسرے کو ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کروکہ ن کا طریق ایک ہذلولی ہے جو مثلث اب ج کے گرد بن سکتا ہے اور اگر ا، ب، ج سے مقابل کے اضلاع پر عمود نکالے جائیں اور یہ عمود اُن مستقیم خطوں کو جو نقاط ب، ج، ا میں سے گزریں اور بالترتیب ب ا، ج ب، ا ج پر عمود ہوں تین نقطوں پر قطع کریں تو ثابت کروکہ ہذلولی مذکور ان نقطوں میں سے گذرتا ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۳۱۸۔ دو مزدوج ہذلولی دئے ہوئے ہیں، ثابت کروکہ ان کے متوازی ماسکی وتروں کو ایکدوسرے سے وہی نسبت ہے جو ہذلولی خطوں کے خروج المرکزون کو آپسمیں ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۷ء]

۳۱۹۔ ہذلولی کے ماسکہ میں سے ایک مستقیم خط گذرتا ہے اور مماس سے ایک مستقل زاویہ بناتا ہے، مماس اور اس مستقیم خط کے تقاطع کا طریق دریافت کرو۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۷ء]

۳۲۰- ایک ہذلولی شاخ کا راس ا ہے اور اس شاخ پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے، نقطہ ن پر کا مماس ل ن لَ متقاربوں کو ل، لَ پر کاٹتا ہے، ہذلولی کے دوسرے راس میں سے متقاربوں کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں اور ایک مستقیم خط م ن ا مَ ان خطوں کو م اور مَ پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ ل م اور لَ مَ متوازی ہیں۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۲ء]

۳۲۱- ایک قائم ہذلولی پر دو نقطے ن اور ق ہیں، محوروں کا تقاطع ج ہے ن پر کا مماس ن ط ہے اور نقطہ ق سے ج ن اور ن ط پر عمود ق م اور ق ل بالترتیب نکالے گئے ہیں، ثابت کہ ج م اور ج ل مساوی ہیں۔

[موڈلن کالج ۱۸۸۲ء]

۳۲۲- اگر ن پر کا مماس متقاربوں کو ل اور م پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ اُس دائرے کے مرکز کا طریق جو مثلث ل ج م کے گرد بن سکے ایک ہذلولی ہے جسکے متقارب پہلے متقاربوں سے زاوے قائمے بناتے ہیں۔

[کوین کالج ۱۸۸۲ء]

۳۲۳- و لا اور و ما دو ثابت مستقیم خط ہیں، ا خط و لا پر واقع ہے اور ب، و ما پر اور وا = و ب، نقاط ا اور ب میں سے کوئی دو متوازی خط ا م، ب ل

کھینچے گئے ہیں جو وما اور ولا کو بالترتیب م اور ل پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ م ل کے نقطہ تنصیف کا طریق ایک ہذلولی ہے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء]

۳۲۴۔ ایک دائرہ دو ثابت نقطوں س اور سَ میں سے گزرتا ہے اور دو ثابت مستقیم خطوں کو جو س سَ پر عمود ہیں اور اس کے نقطہ تنصیف سے متساوی الفصل ہیں نقاط ن، ق اور نَ، قَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ن نَ، س سَ کے متوازی نہ ہو تو یہ ایک ایسی تراش مخروطی کو مس کرے گا جس کے ماسکے س اور سَ ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۳۲۵۔ ایک ثابت مخروطی تراش پر دو ثابت نقطے ن، ق ہیں ایک قائم ہذلولی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے اور اس ہذلولی کا ایک متقارب ایک دیا ہوا مستقیم خط ہے، اگر ہذلولی مخروطی تراش کو ر اور س پر بھی قطع کرے تو ثابت کرو کہ مستقیم خط ن ر اور ق س ایک دوسرے کو ایک ثابت مخروطی تراش پر قطع کریں گے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۳۲۶۔ ولا اور وما دو ثابت مستقیم خط ہیں، ولا پر ایک ثابت نقطہ ا ہے اور وما پر ایک متغیر نقطہ ن ہے، الا پر عمود ن م نکالا گیا ہے اور ن م پر ایک

ایسا نقطہ ق کیا گیا ہے کہ ا ق = ن م، ق کا طریق دریافت کرو۔

[جیمس کالج ۱۸۸۷ء]

۳۲۷۔ ایک دائرہ پر جس کا قطر ایک ثابت خط ا ب ہے ایک نقطہ ن ہے۔ ب میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے۔ جو کہ ن ا ممدودہ کو ق پر ملتا ہے۔ اگر ب ن اور ب ق، ا ب سے مساوی زاویے بنائیں تو ق کا طریق دریافت کرو۔

۳۲۸۔ اگر ایک قائم ہذلولی کے اندر ایک مثلث ا ب ج بنایا جائے تو ثابت کرو کہ اس کا عمودی مرکز ع ہذلولی پر واقع ہوتا ہے اگر ع میں سے خطوط ع اَ، ع بَ، ع جَ مثلث کے اضلاع کے متوازی کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ا اَ، ب بَ، ج جَ متوازی ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۳۲۹۔ ایک قائم ہذلولی کے متقابل شاخوں پر ا اور ج دو نقطے ہیں اج کو قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے جو منحنی کو دوبارہ ب اور د پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ہلیلجی پر کے کسی نقطہ کے فاصلے ذوار بعۃ الاضلاع کے ضلعوں سے باہم متناسب ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۳۳۰۔ ایک مثلث کے قاعدہ ا اَ کا مقام دیا ہوا ہے

اور اس کا طول مستقل ہے، اگر قاعدہ کے متصل زاویوں کا فرق ایک قائمہ کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ اس کے راس کا طریق ایک قائم ہذلولی ہے، اا َ پر عمود ن ل نکالا گیا ہے، نقطہ ل سے دو مماس ل ق، ل قَ اس دائرہ کے کھینچے گئے ہیں جو اا َ کے قطر پر بنایا جائے، ثابت کرو کہ ن ق، اَ میں سے گزرتا ہے اور ن قَ، ا میں سے نیز اگر ق قَ، اا َ کو م پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ ن م نقطہ ن پر کا مماس ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۳۱۔ ایک قبیل کے قائم ہذلولی ایک مثلث کے گرد بنائے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان سب کے مرکز نونقطی دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔

اگر اس مثلث کا ایک زاویہ قائمہ ہو تو سب ہذلولی خطوں کا قائمہ الزاویہ پر ایک مشترک مماس ہوگا۔

[پیتر ہوس ۱۸۸۶ء]

۳۳۲۔ ہم ماسکہ ہلیلجی خطوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے ان پر ایسے نقطے لئے گئے ہیں جن پر کے مماس ایک دیئے ہوئے خط کے متوازی ہیں اس کو ہندسی طریق پر ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق ایک قائم ہذلولی ہے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۳۳۳۔ ایک ہلیلجی کے مزدوج قطر ن جَ، د جِ

ایک ہذلولی کے متقارب ہیں، ق قَ انکا مشترک وتر ہے اور ہلیلجی کے وتر قَ رَ، ق ر بالترتیب ج د اور ج ن کے متوازی ہیں، ثابت کرو کہ

قَ رَ : ق ر = ج د : ج ن

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۳۳۴- ثابت کرو کہ ایک ہذلولی اور ایک دائرہ کے مشترک وتروں کے ایسے زوج بن سکتے ہیں جو متقارب ہوں کو ہم محیط نقطوں پر قطع کریں، نیز ثابت کرو کہ ان دائروں کا مرکز وہی ہے جو اصلی دائرہ کا ہے،

[ترنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۳۳۵- ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے اور قاعدہ کے متصل زاویوں کا فرق بھی معلوم ہے، ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک قائم ہذلولی ہے، معلوم کرو کہ مثلث کا قاعدہ کس صورتمیں قاطع محور ہوگا

[کینز کالج ۱۸۸۵ء]

۳۳۶- دو قائم ہذلولی خطوں کا مرکز ایک ہی ہے اور ان کا ایک مشترک مماس ہے، ثابت کرو کہ انکے قاطع محوروں کا درمیانی زاویہ ان مستقیم خطوں کے درمیانی زاویہ کا نصف ہے جو مرکز کو انقاط تماس سے وصل کرتے ہیں۔

[ترنٹی ہال ۱۸۸۶ء]

۳۳۷- اگر ایک ہلیلجی کے دو متقارب بلحاظ مقام کے معلوم ہوں اور منحنی پر کا ایک نقطہ بھی دیا ہوا ہو تو اسکے راسوں کا مقام دریافت کرو۔

[ترمنتی ہال ۱۸۸۶ء]

۳۳۸- ایک ہذلولی کے چار مماس کھینچنے سے ایک مستطیل کی شکل بنائی گئی ہے، اگر مستطیل کا ایک ضلع ا ب ہذلولی کے مرتب کو لا پر قطع کرے اور نظیری ماسکہ س ہو تو ثابت کرو کہ مثلث لا س ا، لا س ب متشابہ ہیں۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۳۳۹- ثابت کرو کہ ایک قائم ہذلولی میں وتر ن ق اور ن پر کے مماس کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے برابر ہے جو وتر ن ق کے محاذی ن میں سے گزرنے والے قطر کے دوسرے سرے پر بنتا ہے۔

۳۴۰- دو قائم ہذلولی ایک دوسرے کو ن پر مس کرتے ہیں اور ر اور س پر قطع کرتے ہیں، اگر ر س کے قطر پر ایک دائرہ بنایا جائے تو ثابت کرو کہ یہ ن میں سے اور ن میں سے گزرنے والے دو قطروں کے سروں میں سے گزرتا ہے۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۳۴۱- اگر ایک قائم ہذلولی کے اندر ایک مثلث

متساوی الاضلاع بنایا جائے تو اس کے بیرونی دائرہ کے مرکز کا طریق دریافت کرو۔

[کوین کالج ۱۸۸۶ء]

۳۴۲- ثابت کرو کہ ایک قائم ہذلولی میں کسی نقطہ پر کے عماد کا وہ حصہ جو اس نقطہ اور محور کے درمیان واقع ہے مزدوج ہذلولی کے اُس نیم قطر کے برابر ہے جو عماد پر عمود ہو۔

[جون کالج ۱۸۶۱ء]

۳۴۳- دو ثابت نقطوں ا اور ب میں سے ایسے شلجمی خط کھنیچے گئے ہیں جن کے محور ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے متوازی ہیں، اگر ایک ایسا مماس کھینچا جائے جو اب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ اس کے نقطہ تماس کا طریق ایک ہذلولی ہے۔

[جون کالج ۱۸۶۱ء]

۳۴۴- دو مستقیم خط ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں ایک اور مستقیم خط اُن پر ایسے حرکت کرتا ہے کہ اس کے محاذی ایک ثابت نقطہ پر $\frac{1}{2}$ ا زاویہ قائمہ بنتا ہے، یہ ثابت نقطہ خطوط مذکورہ کے درمیانی زاویہ قائمہ کے منصف پر واقع ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط ایک قائم ہذلولی کو مس کرتا ہے۔

[جون کالج ۱۸۶۱ء]

۳۴۵- ایک ہلیلجی دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ ایک ہم ماسکہ، قائم ہذلولی اس کو مساوی و مزدوج قطروں کے سروں پر قطع کرتا ہے

[پیٹر ہوس سنہ ۱۸۶۱]

۳۴۶- ایک شلجمی کے نقطہ ن پر کا مماس راس پر کے مماس کو ما پر ملتا ہے، معین ن ل نقطہ ر تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ رل = ن ما، ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک قائم ہذلولی ہے۔

[جیمس کالج سنہ ۱۸۸۲]

۳۴۷- ایک دے ہوئے دائرہ پر دو ثابت نقطے ا اور ب ہیں اور ج د ایک وتر ہے جسکا طول دیا ہوا ہے، اگر اب کے متوازی ایک وتر ج ع کھینچا جائے اور اگر اع اور ب د ایک دوسرے کو و پر ملیں تو ثابت کرو کہ و کا طریق ایک قایم ہذلولی ہے۔

[جیمس کالج سنہ ۱۸۸۲]

۳۴۸- ایک ہذلولی کا امدادی دائرہ دیا ہوا ہے، نیز منحنی پر کا ایک نقطہ معلوم ہے، ثابت کرو کہ ماسکوں کا طریق ایک ہذلولی ہے۔

۳۴۹- دو مساوی دائرے دو مستقیم متوازی خطوں کو دئے ہوئے نقاط ا اور ب پر مس کرتے ہیں، ان دائروں کے مرکز اب کی ایک ہی جانب میں واقع ہیں

ثابت کرو کہ دائروں کے تقاطع کا طریق ایک ہذلولی ہے۔

[جیمس کالج ۱۸۸۶ء]

۳۵۰۔ ثابت کرو کہ ایک قائم ہذلولی کے دو مماسوں کا درمیانی زاویہ اُس زاویہ کے مساوی ہے (یا اُس زاویہ کا تکملہ ہے) جو وتر تماس کے محاذی مرکز پر بنتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ ان زاویوں کے منصِّف ایک دوسرے کو وتر تماس پر ملتے ہیں۔

[جیمس کالج ۱۸۸۶ء]

۳۵۱۔ ایک قائم ہذلولی کے نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں کو ک اور ل پر قطع کرتا ہے اور ن پر کا عماد محور کو گ پر ملتا ہے، جو دائرہ ذوارابعۃ الاضلاع ج ک گ ل کے گرد بنایا جائے اس کا مرکز دریافت کرو۔

[جون کالج ۱۸۸۵ء]

۳۵۲۔ دو ہذلولی خطوں کا ایک ہی قاطع محور ہے، اس پر ایک عمود قائم کیا گیا ہے جو منحنیات کو ن اور نَ پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ن اور نَ پر کے مماس ایک دوسرے کو قاطع محور پر ملتے ہیں۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۳۵۳۔ ایک ہذلولی کے نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب کو ط پر ملتا ہے، اس متقارب کے متوازی ایک خط رَن ر کھینچا گیا ہے جو ایک مرتب کو رَ پر

اور خط س ط کو ر پر ملتا ہے، اس میں س مرتب مذکور کا متعلقہ ماسکہ ہے۔ ثابت کرو کہ

رَ ن = ر ن = س ن

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۳۵۴۔ ایک ہذلولی کے نقطہ ن پر کا مماس ایک متقارب کو ط پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ط اور سَ ن کا درمیانی زاویہ، زاویہ س ط ن کا دوچند ہے، اس میں ج مرکز ہے اور س، سَ منحنی کے ماسکے ہیں۔

[ترنیتی کالج ۱۸۸۴ء]

۳۵۵۔ ایک ہذلولی کے ماسکے س، سَ ہیں، اگر ج ن، ج د اس کے مزدوج نیم قطر ہوں تو ثابت کرو کہ د کا فاصلہ ایک ایسے خط سے جو ج میں سے سَ ن کے متوازی کھینچا جائے نصف محور اصغر کے مساوی ہے۔

[ترنیتی کالج ۱۸۸۵ء]

۳۵۶۔ ایک ہذلولی کے نقطہ ن پر کا مماس متقاربوں سے ق، قَ پر ملتا ہے، ق م، ق، م، بالترتیب نقاط ق اور ق، کے معین ہیں اور مرکز سے ن پر کے مماس پر عمود ج ط کھینچا گیا ہے اگر ط م، ط م، نقطہ ن پر کے عماد کو بالترتیب ک اور ل پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق ک ق، ل ایک معیّن شکل ہے۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۳۵۷- اگر ہذلولی کی یہ تعریف کی جائے کہ یہ ایک ایسے خط کا لفافہ ہے جو دو ثابت خطوں سے ایک مثلث کاٹتا ہے جس کا رقبہ مستقل ہے تو ثابت کرو کہ ہذلولی کے دو متقارب ہیں اور خط مذکور منحنی کو اس کے نقطہ تنصیف پر مس کرتا ہے۔

[جی اور سی ۱۸۸۵ء]

۳۵۸- اگر دو ہم مرکز قائم ہذلولی خطوں کے نقطہ تقاطع پر مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کا درمیانی زاویہ قاطع محوروں کے درمیانی زاویہ کا دو چند ہے

[ترنٹی ہال ۱۸۸۵ء]

۳۵۹- فرض کرو کہ ن ق ایک قائم ہذلولی کا قطر ہے اور ن کو مرکز اور ن ق کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، اگر دائرہ اور ہذلولی کے باقی نقاط تقاطع ا، ب، ج ہوں تو مثلث ا ب ج متساوی الاضلاع ہے۔

[ک ۱۸۸۴ء]

۳۶۰- ایک دائرہ ایک قائم ہذلولی کو ا، اَ، ن، نَ پر ملتا ہے، ن، نَ پر ہذلولی کے مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا نقطہ تقاطع ہذلولی کے اُس قطر پر واقع ہے جو ا اَ پر عمود ہے۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۱- ایک شلجمی کا ماسکہ س ہے اور راس ا، س ا

مرتب کو لا پر ملتا ہے، س لا ح ایک °۶۰ کا زاویہ ہے اور س ح، س لا پر عمود ہے، ثابت کرو کہ س اور ح کو ماسکے مان کر ایک ہذلولی کھینچ سکتا ہے جو شلجمی کو نقطہ ن پر مس کرتا ہے اور ن کا ماسکی فاصلہ نیم وتر خاص کے برابر ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۲۔ ایک دیے ہوئے نقطہ ن میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دو ثابت مستقیم خطوں کو نَ اور قَ پر ملتا ہے، نَ ن قَ پر ایک ایسا نقطہ ق لیا گیا ہے کہ

ق قَ = ن نَ،

ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک ہذلولی ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۵ء]

۳۶۳۔ ثابت کرو کہ ایک ہذلولی کے کسی نقطہ پر کے مماس اور عماد متقاربوں اور محوروں کو بالترتیب چار نقطوں پر قطع کرتے ہیں جو ہذلولی کے مرکز میں سے گزرنے والے دائرہ پر واقع ہوتے ہیں، نیز ثابت کرو کہ اس دائرہ کا نصف قطر بالعکس متناسب ہے اُس عمود کے جو مرکز سے مماس پر نکالا جائے۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۳۶۴۔ ایک ہذلولی کے متقارب ایک دوسرے سے نصف زاویہ قائمہ بناتے ہیں، نقطہ ن میں سے

ہر ایک متقارب کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو دوسرے متقارب کو بالترتیب ح اور ک پر ملتے ہیں، مثلث ج ح ک کے عمودی مرکز کا طریق دریافت کرو (اور اسکو مرتسم کرو)

[پٹرہوس ۱۸۸۳ء]

۳۶۵- ایک نقطہ ل پر کا مماس ایک متقارب کو ط پر ملتا ہے، دو وتر جو نقطہ ل کو دو اور نقطوں م اور ن کے ساتھ ملاتے ہیں وہ اس متقارب سے ا اور و پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ط ا = اَ و جہاں اَ وہ نقطہ ہے جہاں م ن متقارب سے ملتا ہے

[کلیر کالج ۱۸۸۴ء]

۳۶۶- ا ب ج د ایک متوازی الاضلاع ہے، ب ج پر ایک نقطہ ع لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے ا د پر عمود ع ف نکالا گیا ہے، اِ ع پر عمود ع گ قائم کیا گیا ہے۔ جہاں نقاط ف اور گ خط ا د پر واقع ہیں، ا ب پر ایک نقطہ ک ایسا لیا گیا ہے کہ ا ک = ف گ، ثابت کرو کہ ف ک ہمیشہ ایک ثابت ہذلولی کو مس کرتا ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۳۶۷- ایک ہذلولی پر کے کسی نقطہ ن سے متقاربوں پر عمود ن م اور ن ل نکالے گئے ہیں، ن ل منحنی

کو دوبارہ ن َ پر ملتا ہے ، ثابت کرو کہ ن م اور ن َ ل
کی باہمی نسبت ن کے سب مقامات کے لئے وہی ہے۔
[پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۳۶۸۔ دائروں کا ایک نظام دیا ہوا ہے، سب کے سب دائرے دو ثابت نقطوں میں سے گزرتے ہیں اور اُن دائروں کے متوازی مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اُن کے نقاط تماس کا طریق ایک قایم ہذلولی ہے ۔
[کرائسٹ کالج ۱۸۸۴ء]

۳۶۹۔ نقطے ا، ب، ج، د ایک ہذلولی پر واقع ہیں، اب اور ج د ایک دوسرے کو ایک متقارب پر قطع کرتے ہیں، دوسرا متقارب دریافت کرو۔
[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۳۷۰۔ ایک قائم ہذلولی کے قاطع محور پر ایک نقطہ ط ہے، اس نقطہ سے ہذلولی کے مماس کھینچے گئے ہیں جو راسوں پر کے مماسات سے ق اور قَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ق قَ امدادی دائرہ کو ایسے نقطہ ر پر مس کرتا ہے کہ اگر ر اور ط کو ایک مستقیم خط کے ذریعہ ملایا جائے تو یہ خط زاویہ ق ط قَ کی تنصیف کریگا۔
[ترنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۳۷۱۔ ایک مثلث اب ج کے گرد ایک دائرہ بنایا گیا ہے اور اسکے نقطہ ج پر مماس کھینچا گیا ہے، مثلث کے ضلع اج

کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو ا ب اور مماس مذکورہ کو بالترتیب نقاط ن اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ج ن، ب ق کے تقاطع کا طریق ایک قائم ہذلولی ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۴ء]

۳۷۲- ایک ہذلولی پر کے دو نقاط معلوم ہیں اور اس کا ایک متقارب دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ اس کے محور کا لفاف ایک شلجمی ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۴ء]

۳۷۳- ایک ثابت نقطہ میں سے ایک ہذلولی کے وتر کھینچے گئے ہیں ثابت کرو کہ انکے نقاط تنصیف کا طریق ایک ایسا شلجمی ہے جو اصلی ہذلولی یا اسکے مزدوج کے متشابہ ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۳۷۴- ایک مستوی کھیت کے ایک مقام پر ایک بندوق کی آواز اور نشانہ کے چاند پر گولی لگنے کا دھماکہ دونوں ایک ہی وقت سنائی دیئے، سننے والے کے مقام کا طریق دریافت کرو۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۳۷۵- ایک قائم ہذلولی میں اگر ن ق ایک وتر ہو اور ن ق کا مزدوج وتر ج ص ہو تو ثابت کرو کہ ن ق اور ن پر کے مماس کا درمیانی زاویہ، زاویہ ص ج ن کے برابر ہے

[سلون کالج ۱۸۸۴ء]

۳۷۶- ایک مزدوج ہذلولی پر ایک نقطہ ک ہے، اس نقطہ سے ایک خط ک ق ن ن، ق، کھینچا گیا ہے جو ہذلولی

کو ن، ن۱ پر اور متقاربوں کو ق، ق۱ پر ملتا ہے ثابت کرو کہ

ک ن × ک ن۱ = ۲ ک ق × ک ق۱

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۷- ایک ہذلولی پر دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، ن میں سے ایک خط ایک متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے اور ق میں سے ایک اور خط دوسرے متقارب کے متوازی کھینچا گیا ہے اور یہ دونوں خط ایک دوسرے کو ط پر ملتے ہیں ن اور ق پر کے مماس ط ق اور ط ن کو بالترتیب ن۱، ق۱ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ن۱ ق۱، ن ق کے متوازی ہے

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۸- ایک ہذلولی کے ماسکے س، سَ ہیں نظیری مرتب خط س سَ کو بالترتیب لا اور لاَ پر ملتے ہیں، ایک مماس پر عمود س ما اور سَ مَا کھینچے گئے ہیں، اگر لاما اور لاَمَا امدادی دائرہ کو دوبارہ ھا۱ اور ھاَ۱ پر ملیں تو ثابت کرو کہ ھا۱ ھاَ۱ ہذلولی کا مماس ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۳۷۹- ایک قائم ہذلولی کے دو وتر دئے ہوئے ہیں ان میں سے ہر ایک کے نقطہ تنصیف میں سے ایک خط کھینچا گیا ہے جو دوسرے وتر کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ انکا نقطہ تقاطع، مرکز اور وتروں کے نقاط تنصیف ایک دائرہ کے محیط پر واقع ہیں

[کلیر کالج ۱۸۸۳ء]

۳۸۰- ایک مثلث ایک ہذلولی کے اندر بنایا گیا ہے اسکے دو راسوں میں سے دو خط متقاربوں کے متوازی کھینچے گئے ہیں جو مقابل کے اضلاع کو دو نقطوں پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ جو خط ان نقطوں کو وصل کرتا ہے وہ اُس مماس کے متوازی ہے جو تیسرے نقطہ راس پر کھینچا جائے۔

[کلیر کالج ۱۸۸۳ء]

۳۸۱- اگر ایک قائم ہذلولی کے قطر ن ج ن، کا معین ق ص ہو تو ثابت کرو کہ ق ص نقطہ ق پر اُس دائرہ کا مماس ہے جو مثلث ن ق ن، کے گرد بنایا جائے۔

[ترنیٹی ہال ۱۸۸۳ء]

مخروطی تراشین بالعموم

۳۸۲- ایک مخروطی تراش کا مماس اسکے دو مرتبوں کو نقاط ل اور م پر قطع کرتا ہے، ان مرتبوں کے متعلقہ ماسکے بالترتیب س اور ح ہیں، اگر ل س اور م ح (ممدودہ بشرط ضرورت) کا تقاطع ع ہو تو ثابت کرو کہ ل ع = م ع

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۵ء]

۳۸۳- ایک مخروطی تراش کا ماسکہ معلوم ہے اور اس پر کے دو نقطے دئے ہوئے ہیں، ثابت کرو کہ مرتب کے پائین کا طریق ایک دائرہ ہے۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۳۸۴- ایک مرکز دار تراش میں فرض کرو کہ ن پر کا مماس اور عماد بالترتیب ن ک اور ن ل ہیں اور فرض کرو کہ ک س ل، سَ ن کے متوازی کھینچا گیا ہے جہاں س اور سَ ماسکے ہیں، ثابت کرو کہ ک س = س ل

[پٹرہوس ۱۸۸۶ء]

۳۸۵- ن پر کا مماس محور اعظم کو ط پر ملتا ہے، تراشش کے ماسکوں سے ایک مماس پر عمود نکالے گئے ہیں اور ان عمودوں کے پایوں سے دوبارہ تراش کے محور پر عمود نکالے گئے ہیں اور وہ منحنی کو ل اور لَ پر ملتے ہیں،
ثابت کرو کہ ط ل لَ ایک مستقیم خط ہے

[کلیر کالج ۱۸۸۸ء]

۳۸۶- دو ثابت مستقیم خط ایک متحرک مستقیم خط سے ایک ایسا حصہ کاٹتے ہیں جس کے محاذی ایک ثابت نقطہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ متحرک خط ایک مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ وہ ثابت نقطہ ہے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۸ء]

۳۸۷- ایک مرکز دار مخروطی تراش کے کسی قطر پر دو نقطے ا اور ب ہیں، نیز مزدوج قطر پر دو نقطے ج اور د ہیں، اگر اج کا قطب ب د پر واقع ہو تو ثابت کرو کہ اد کا قطب ب ج پر واقع ہوگا۔

[لندن بی-اے اونرز ۱۸۷۰ء]

۳۸۸- اگر دو مثلث ایک مخروطی تراش کے گرد بنائے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے گرد ایک اور مخروطی تراشش بن سکتی ہے۔

۳۸۹- اگر دائروں کی کوئی تعداد ایک مخروطی تراش کو ایک ہی نقطہ پر مس کرے تو ثابت کرو کہ نقاط تقاطع کو ملانے والے وتر سب متوازی ہونگے۔

[لندن ایم۔ بی۔ اے اونرز ۱۸۷۳ء]

۳۹۰- مخروطی تراشوں کے ایک سلسلہ کا ایک ماسکہ اور ایک مرتب مشترک ہیں، ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو مرتب پر عمود ہے اور مخروطی تراشوں کو ن، ق، ر ..... پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر مشترک ماسکہ سے ن، ق، ر ..... پر کے مماسوں پر عمود نکالے جائیں تو ان کے پائے ایک ایسے مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں جو مرتب کے پائین میں سے گزرتا ہے۔

[جیس کالج ۱۸۸۸ء]

۳۹۱- ایک ہلیلجی ایک مثلث متساوی الساقین کے اندر بنایا گیا ہے، ہلیلجی کا محور اعظم مثلث کے قاعدہ کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ محور اعظم کے کسی ایک سرے کا طریق ایک ایسا ہلیلجی ہے جس کا راس اُس عمود کا نقطہ تنصیف ہے جو مثلث کے راس سے قاعدہ پر نکالا جائے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۸ء]

۳۹۲- دو مخروطی تراشوں کا ایک ماسکہ اور ایک مرتب دونوں

مشترک ہیں، نقطہ ن ایک تراش پر واقع ہے اور ق دوسری پر اور زاویہ ن س ق ایک مستقل زاویہ عہ کے برابر ہے۔ ثابت کرو ن اور ق پر کے مماس ایک دوسرے کو ایک ایسی تراش پر قطع کرتے ہیں جس کا ماسکہ اور مرتب دونوں وہی ہیں جن کا اوپر ذکر ہوا۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۳۔ جو خط ایک تراش پر کے نقطہ ن کو ماسکوں کے ساتھ ملاتے ہیں وہ منحنی کو دوبارہ ق اور ر پر ملتے ہیں ثابت کرو کہ ق ر ایک ہم مرکز اور ہم محور مخروطی تراش کو مس کرتی ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۷ء]

۳۹۴۔ ایک مخروطی تراش پر ایک متحرک نقطہ ن ہے اور ن پر کا مماس ایک ثابت مماس کو ق پر قطع کرتا ہے، ماسکہ س سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو س ق پر عمود ہے اور جو ن پر کے مماس کو ر پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ر کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۳۹۵۔ ایک مخروطی تراش کے نقطہ ن پر کا مماس قاطع محور کو ط پر ملتا ہے، تراش کا ماسکہ س ہے، ثابت کرو کہ تراش ہلیلجی، شلجمی یا ہذلولی ہوگی اگر بالترتیب س ط بڑا ہو، مساوی ہو یا چھوٹا ہو س ن سے

[ترنٹی کالج ۱۸۸۶ء]

۳۹۶- ایک دی ہوی مخروطی تراش کا مرکز ج ہے اور و ایک دیا ہوا نقطہ ہے، ج و تراش کو ایک ایسے نقطہ پر قطع کرتا ہے جو ج اور و کے درمیان واقع ہے، ایک مستقیم خط و ن ر ق مخروطی تراش کو ن اور ق پر ملتا ہے اور ج و کے مزدوج قطر کو ایک نقطہ ر پر ملتا ہے جو ن اور ق کے درمیان واقع ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{رن}}{\text{ن و}} + \frac{\text{رق}}{\text{ق و}}$$ خط و ن ر ق کی سمت پر منحصر نہیں ہے۔

۳۹۷- ایک مخروطی تراش کا ماسکہ س اور ایک ماسکی وتر ن س ق دونوں دئے ہوئے ہیں، اگر ن پر کا عماد محور کو گ پر ملے تو گ کا طریق دریافت کرو۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۶ء]

۳۹۸- ایک مخروطی تراش اسطرح کھینچی گئی ہے کہ وہ ایک نقطہ معلومہ ن میں سے گذرتی ہے اور اس نقطہ پر اس کا ایک ثابت مماس ن ط ہے، محور اعظم ایک ثابت خط ن ی پر عمود ہے اور اس کا طول ایک دئے ہوئے خط کے برابر ہے ثابت کرو کہ تراش کا مرکز ایک ہذلولی پر واقع ہے جس کے متقارب ن ی اور ن ط ہیں۔

۳۹۹- ایک مخروطی تراش پر کوئی نقطہ ن ہے، مرتب پر عمود ن ک نکالا گیا ہے، اگر ک ن کو اتنا خارج کیا جائے کہ ن ق، ن کے ماسکی فاصلہ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ ق کا طریق ایک مخروطی تراش ہے-

[کیتھرین کالج ۱۸۸۷ء]

۴۰۰- دو مخروطی تراشوں کے نقاط تقاطع میں سے کم از کم دو نقطے حقیقی ہیں، ان کے مشترک مماس کھینچے کا ایک خطی ہندسی عمل دریافت کرو-

[جون کالج ۱۸۸۶ء]

۴۰۱- کئی ایک کرّے ایک ثابت نقطہ میں سے گذرتے ہیں اور دو دی ہوئی سطحوں کو مس کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس دو دائروں پر واقع ہوتے ہیں اور کسی ایک کرہ کے مرکز کا طریق ایک ہلیلجی ہے،

اگر سطحون کا درمیانی زاویہ ۶۰° ہو تو ثابت کرو کہ ہلیلجی کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ نصف محور اعظم کے برابر ہے-

۴۰۲- ایک مخروطی تراش کا ماسکہ س ہے اور اسکے مماس ط ن، ط ق تنظیری مرتبوں کو بالترتیب ل اور م پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ ط س زاویہ ل س م

کی تنصیف کرتا ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۵ء]

۴۰۳۔ ایک مخروطی تراش ایک مثلث کے اندر بنی ہوئی ہے اور مثلث کے اضلاع اسکو مس کرتے ہیں، اس تراش کا ایک ماسکہ دیا ہوا ہے معلوم کرو کہ دوسرا ماسکہ کس طرح دریافت کیا جائے۔ کیا ایک سے زیادہ حل ممکن ہیں؟

[پیٹر ہوس ۱۸۸۵ء]

۴۰۴۔ ثابت کرو کہ ایک مخروطی تراش کے ماسکی وتروں کے نقاط تنصیف کا طریق ایک متشابہ مخروطی تراش ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۰۵۔ دو مخروطی تراشیں شکلاً اور وضعاً متشابہ ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ا اور ب پر قطع کرتی ہیں، ایک مشترک مماس انکو ن اور ق پر ملتا ہے اور ن ق کو ایک نقطہ ر تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ق ر = ن ق، اگر ر ا اور ر ب ن میں سے گذرنے والی مخروطی تراش کو ح اور ک پر اور اگر ح ک، ق ن ممدودہ کو س پر ملے تو ثابت کرو کہ ن س = ن ق

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۰۶۔ ایک مخروطی تراش ایک مثلث ا ب ج کے

گرد بنی ہوئی ہے، اس کا ایک ماسکہ ب ج پر واقع ہے، نظیری مرتب کا لفاف دریافت کرو۔ اگر ا زاویہ قائمہ ہو تو ثابت کرو کہ لفاف ایک شلجمی ہے۔

[ترنٹی کالج سنہ ۱۸۸۵]

۴۰۷۔ تین نقطے ا، ب، ج دئے ہوئے ہیں ثابت کرو کہ دو ایسے شلجمی کھینچ سکتے ہیں جو ا اور ب میں سے گذریں اور جن کا ماسکہ ج ہو، نیز ثابت کرو کہ ان شلجمی خطوں کے محور اس ہذلولی کے متقاربوں کے متوازی ہیں جو ج میں سے گذرتا ہے اور جس کے ماسکے ا اور ب ہیں۔

[ترنٹی کالج سنہ ۱۸۸۶]

۴۰۸۔ اگر دو مخروطی تراشوں کا ایک مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے چار نقاط تقاطع ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

[کینز کالج سنہ ۱۸۸۵]

۴۰۹۔ ثابت کرو کہ ایک ہلیلجی کے اُن مماسوں کے تقاطع کا طریق جو محور اعظم اور اصغر سے بالترتیب مساوی زاوئے بناتے ہیں لیکن ایکدوسرے سے زاویہ قائمہ نہیں بناتے ایک قائم ہذلولی ہے جسکے راس ہلیلجی کے ماسکے ہیں۔

[کرائسٹ کالج سنہ ۱۸۸۵]

۱۴۱۰ - ایک ہذلولی کا متقارب ج ن ایک ہلیلجی کو نقطہ ن پر قطع کرتا ہے، ہلیلجی کے اعظم اور اصغر محور بالترتیب ہذلولی کے مزدوج اور قاطع محور ہیں، ج ن کو نَ تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ ن نَ = ج ن اور ج ا پر عمود ن م اور نَ ق مَ کھینچے گئے ہیں جو اس کو بالترتیب م اور مَ پر ملتے ہیں جہاں ق، نَ ق م اور ہذلولی کا نقطہ تقاطع ہے ثابت کرو کہ ق م نقطہ ق پر کا مماس ہے۔

[سڈنی کالج ۱۸۶۱ء]

۱۴۱۱ - دو ہلیلجی شکلاً اور وضعاً متشابہ ہیں، ان کے مشترک مماسوں کے دو زوج ایکدوسرے کو س اور سَ پر قطع کرتے ہیں، ایک ہلیلجی کا ایک مماس ان کو ص ط، صَ طَ پر کاٹتا ہے اور دوسرے ہلیلجی کا مماس ان کو ص۱ ط۱، صَ۱ طَ۱ پر ملتا ہے، اگر صَ طَ۱، س میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ طَ صَ۱ بھی س میں سے گذرتا ہے۔

۱۴۱۲ - ایک شلجمی اور ایک مرکز دار مخروطی تراش دونوں ایکدوسرے کو چار نقطوں ا، ب، ج، د پر قطع کرتے ہیں مخروطی تراش کے وہ قطر کھینچے گئے ہیں جو ا ب اور ج د کے متوازی ہیں اور انکے سروں کو مستقیم خطوں کے ذریعہ ملایا گیا ہے، ثابت

کروکہ شلجمی کا محوران میں سے ایک خط کے متوازی ہے۔

[جون کالج سنہ ۱۸۶۱]

۴۱۳۔ ایک مخروطی تراش کے دو نقطوں ن اور ق کے مماس نقطہ د پر ملتے ہیں اور د سے دو مستقیم خط کھینچے گئے ہیں جو تراش کو کاٹتے ہیں اور قاطع محور سے مساوی زاوئے بناتے ہیں، اگر وہ ن ق کو م اور ل پر ملیں۔ اور وترون کے نقاط تنصیف ر اور س ہوں تو ثابت کروکہ ر م ل س ایک دائرہ پر واقع ہوتے ہیں۔

[پیٹر ہوس سنہ ۱۸۸۲]

۴۱۴۔ دو متشابہ مخروطی تراشون کے مرتب متوازی ہیں اور انکا ماسکہ س مشترک ہے، اگر س میں سے گذرنے والا ایک مستقیم خط ان مخروطی تراشون کو ن اور ق پر ملے تو ن ق کے نقطہ تنصیف کا طریق دریافت کرو۔

[کرائسٹ کالج سنہ ۱۸۸۲]

۴۱۵۔ ا، ب، ج کوئی تین ثابت نقطے ہیں ا میں سے ایک مستقیم خط کھینچا گیا ہے جو ایک دی ہوئی مخروطی تراش کو ن، ق پر ملتا ہے، ثابت کروکہ ن ب اور ق ج کے تقاطع کا طریق

ایک مخروطی تراش ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۴۱۶- و ایک ثابت نقطہ ہے اور ایک دیئے ہوئے مستقیم خط پر ایک نقطہ ن لیا گیا ہے، اگر اسی خط پر ایک نقطہ ق ایسا لیا جائے کہ ن ق اور و ن کی باہمی نسبت مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ن اور ق کے نقطہ تنصیف کو ملانے والا خط ہمیشہ ایک ایسی مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ و ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۴۱۷- ثابت کرو کہ ایک ہم ماسکہ ہلیلجی اور ہذلولی ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر قطع کرتے ہیں اور ہذلولی کے متقارب ہلیلجی کے امدادی دائرہ پر کے اُن نقاط میں سے گزرتے ہیں جو نقاط تقاطع کے نظیری نقاط ہیں۔

۴۱۸- ایک خط ا ب ایک ثابت نقطہ ا میں سے کھینچا گیا ہے اور ایک ثابت دائرہ کو ب پر ملتا ہے، نقطہ ب میں سے ایک خط ب ج کھینچا گیا ہے جو ا ب پر عمود ہے اور جو ایک ہم مرکز دائرہ سے ج پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ اگر نقطہ ج میں سے ایک خط ا ب کے متوازی کھینچا جائے تو وہ ایک مخروطی تراش کو مس کرتا ہے۔

[پٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۴۱۹- ایک مرکز دار مخروطی تراش کے مرتب پر ایک نقطہ ہے اس نقطہ سے تراش کے دو مماس کھینچے گئے ہیں اور ان کے نقاط تماس کو ملایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسطرح سے جو مثلث بنتا ہے اس کے عمودی مرکز کا طریق ایک ایسی مخروطی تراش ہے جو دی ہوئی تراش کے متشابہ ہے

[پیٹرہوس ۱۸۸۴ء]

۴۲۰- ہم ماسکہ مخروطی تراشوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے اور ایک ثابت مستقیم خط اُن میں سے ایک کو دو نقطوں پر ملتا ہے، اگر ان نقطوں پر تراش کے عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان کے نقطۂ تقاطع کا طریق ایک مستقیم خط ہے

[پیٹرہوس ۱۸۸۴ء]

۴۲۱- ایک شلجمی کے مرتب پر کوئی نقطہ لیا گیا ہے اس نقطہ کو ایک ماسکہ مان کر اور شلجمی کے ماسکہ کو دوسرا ماسکہ مان کر ایک ہلیلجی یا ہذلولی بنایا گیا ہے، جن نقطوں پر یہ منحنی مرتب کو قطع کرتا ہے اُن پر اسکے مماس اور عماد کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ شلجمی کے بھی مماس ہیں۔

[پیٹرہوس ۱۸۸۴ء]

۴۲۲- ایک مخروطی تراش کا ایک ثابت وتر ن ق ایک قطر کو ل پر ملتا ہے اور اگر ل پر اس قطر کا معین کھینچا جائے تو وہ ن اور ق پر کے مماسوں کو ح اور ک پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ح ک کی تنصیف نقطہ ل پر

ہوتی ہے۔

[کینز کالج ۱۸۸۳ء]

۴۲۳ - ایک مخروطی تراش کے نقطہ ن میں سے دو وتر ن ق، ن قَ کھینچے گئے ہیں، اگر ق اور قَ میں سے وتروں پر عمود نکالے جائیں تو وہ ن پر کے عماد سے بالترتیب ل اور لَ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ن ل، ن لَ کو آپس میں وہی نسبت ہے جو ن ق، ن قَ کے متوازی قطروں کے مربعوں کو آپس میں ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۵ء]

۴۲۴ - ایک مخروطی تراش پر چار نقطے ا، ب، ج، د ایسے ہیں کہ ان پر کے عماد ایک نقطہ پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ا ب اور ج د کے متوازی جو قطر ہیں ان کے مربعوں کا مجموعہ ان قطروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے جو ا ج اور ب د کے متوازی ہیں۔

[کلیر کالج ۱۸۸۵ء]

۴۲۵ - دو ثابت نقطوں ا اور ب کا درمیانی فاصلہ ۲ف ہے، ایک شلجمی ان نقطوں میں سے گزرتا ہے، ا ب کے نقطہ تنصیف سے فاصلہ ج پر ایک مستقیم خط ہے جو شلجمی کا مرتب ہے، ثابت کرو کہ شلجمی کے ماسکہ کا طریق ایک مخروطی تراش ہے جو ہلیلجی ہوگی اگر

ج بڑا ہو ب سے اور ہذلولی اگر ج چھوٹا ہو ف سے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۲۶۔ ایک دائرہ ایک کاغذ کے تختہ پر بنایا گیا ہے اور کاغذ کو اس طرح تہ کیا گیا ہے کہ کاغذ کا کونہ دائرہ کے محیط پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ جیسے یہ کونہ دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے کاغذ کا شکن ایک مخروطی تراش کو لف کرتا ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۲۷۔ ایک کاغذ کی شکل نصف دائرہ ہے، کاغذ کو اس طرح تہ کیا گیا ہے کہ قطر حائط پر کا ایک خاص نقطہ ن ہمیشہ اس کے گول گھیر پر واقع ہوتا ہے، ثابت کرو کہ کاغذ کی شکن ہمیشہ ایک ثابت مخروطی تراش کو مس کرتی ہے

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۲۸۔ ایک دائرہ اور ایک مخروطی تراش ایک دوسرے کو ب، ج، د، ع پر قطع کرتے ہیں ثابت کرو کہ اُن خطوں میں سے ہر ایک جو بالترتیب ب ج اور د ع، ب د اور ج ع، ب ع اور ج د کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں دو دیئے ہوئے مستقیم خطوں میں سے کسی ایک کے متوازی ہیں۔

۴۲۹۔ ط ن، ط نَ ایک مخروطی تراش کے مماس ہیں اور ن گ، نَ گَ نقاط ن، نَ پر کے عماد

ہیں، ثابت کرو کہ ط ن : ط نَ = ن گ : نَ گ
نیز ثابت کرو کہ اگر گ ل، گَ لَ خط ن نَ پر عمود ہوں
تو ن ل = نَ لَ

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۵ء]

۴۳۰- ایک نقطہ ط سے ایک مخروطی تراش کے دو مماس کھینچے گئے ہیں جو اسکو نقاط ن اور ق پر ملتے ہیں، ط ن کے متوازی ایک خط کھینچا گیا ہے جو ط ق کو ل پر، ن ق کو و پر، اور مخروطی تراش کو ر اور س پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ ل و^2 = ل ر × ل س

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۴۳۱- ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور سَ ہیں اس پر دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، س ن اور سَ ق ایک دوسرے کو م پر، س ق اور سَ ن نقطہ ل پر اور زاویوں ق س ن اور ق سَ ن کے منصف ایک دوسرے کو ر پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ر ن، ر ق، ہلیلجی کے مماس ہیں اور نقطے م اور ل ایک ہم ماسکہ ہذلولی پر واقع ہیں جسکو ر م اور ر ل مس کرتے ہیں۔

[جیسس کالج ۱۸۸۵ء]

۴۳۲- ایک خط، ایک دائرہ جس کا مرکز و ہے اور ایک نقطہ س تینوں دیے ہوئے ہیں، اس خط پر کے ایک

متغیر نقطہ ع کو س کے ساتھ ایک خط کے ذریعہ ملایا گیا جو دائرہ کو نقاط ص اور د پر ملتا ہے نقطہ س سے و ص اور و د کے متوازی خط کھینچے گئے ہیں جو ع و کو نقاط ن اور ق پر ملتے ہیں، ثابت کرو کہ ان نقطوں کا طریق ایک مخروطی تراش ہے۔ جس کا ماسکہ س ہے اور جس کا مرتب مذکورہ بالا دیا ہوا خط ہے۔

مخروطی تراش کو اس طرح بنانے کے عمل سے یہ مسئلہ حاصل کرو کہ اگر کسی نقطہ سے ایک مخروطی تراش کے مماس کھینچے جائیں تو ان کے محاذی ماسکہ پر مساوی زاویئے بنتے ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۴۳۳۔ اگر دو ہم ماسکہ ہلیلجی دو ہم ماسکہ ہذلولی خطونکو قطع کریں تو ثابت کرو کہ اس طرح سے جو منحنی ذوار بعتہ الاضلاع بنتی ہے اسکے قطر ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

ثابت کرو کہ یہ نتیجہ ایک ہم ماسکہ اور ہم محور شلجمی خطوں کے نظام کے لئے بھی درست ہے

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۴۳۴۔ ایک قطع زائد بنایا گیا ہے جسکا ماسکہ وہی ہے جو ایک قطع ناقص کا ہے اور اس ماسکہ کے متعلقہ نقطہ راس پر قطع ناقص کا جو مماس ہے وہ مذکورہ بالا قطع زائد کا مرتب ہے۔ اگر ان نقطوں سے جہاں پر زائد ہلیلجی کے محور اصغر کو قطع کرتا ہے ہلیلجی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ مماسات زاید کے

متقاربوں کے متوازی ہونگے۔

[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۴۳۵۔ ایک ہلیلجی اور ایک ہذلولی کے ماسکے مشترک ہیں اور وہ ایک دوسرے کو ن پر ملتے ہیں، نقطہ ن پر ہذلولی کا مماس ن ما ہے، ماسکوں سے مماس پر عمود س ما اور سَ ے نکالے گئے ہیں،

ثابت کرو کہ ن ما × ن ے = ب ج^2

جہاں ب ج بَ ہلیلجی کا محور اصغر ہے

[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۴۳۶۔ ایک قائم ہذلولی ایک ہلیلجی کو نقاط ن اور ق پر ملتا ہے ہلیلجی کے محور ہذلولی کے متقارب ہیں، محور ج ا پر معین ن م اور ق ل، اور محور ج ب پر معین ن ر، ق ط کھینچے گئے ہیں،

ثابت کرو کہ ج م^2 + ج ل^2 = ج ا^2

اور ج ل : ج ر = ج ا : ج ب

[پیٹر ہوس ۱۸۸۴ء]

۴۳۷۔ ایک دائرہ کے محیط پر ایک ثابت نقطہ و ہے اس نقطہ سے ایک وتر وا کھینچا گیا ہے اور اس کو نقطہ ب تک اتنا خارج کیا گیا ہے کہ و ب اور وا کے مربعوں کا فرق مستقل ہے، ثابت کرو کہ ب میں سے گزرنے والا خط جو و ب پر عمود ہے ایک مخروطی تراش کو مس کرتا ہے جس کا مرکز و ہے اور جسکا ماسکہ و میں سے گزرنے

والے دائرہ کے قطر کا دوسرا سرا ہے۔ [کلیر کالج ۱۸۸۴ء]

۴۳۸۔ ایک مخروطی تراش کے دو مماس دئے ہوئے ہیں اور ایک ماسکہ بھی معلوم ہے، ثابت کرو کہ اس کے محور اصغر کا لفاف ایک شلجمی ہے جسکا ماسکہ س ہے۔

[تزنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۳۹۔ ایک مخروطی تراش کے ماسکی وتر ن س ق کا مقام دیا ہوا ہے اور اس کے محور کا مقام بھی معلوم ہے تراش کو مرتسم کرو۔ [پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۴۴۰۔ اگر ایک ہلیلجی کا محور اعظم ا ج اَ ہو اور ن ل نَ ایک دگنا معین ہو جو ج اَ کی ل پر تنصیف کرے تو تظلیل سے ثابت کرو کہ ن پر کا مماس ا نَ کے متوازی ہے۔ [پمبرک کالج ۱۸۸۴ء]

۴۴۱۔ ایک ہلیلجی اور ایک ہذلولی ہم مرکز اور ہم محور ہیں، ایک نقطہ ن کے قطبی بلحاظ دونوں مخروطی تراشوں کے ایک دوسرے کو ق پر قطع کرتے ہیں اور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں ثابت کرو کہ ن کا طریق دو ایسے مستقیم خط ہیں جو مرکز ج میں سے گزرتے ہیں لیکن اگر مخروطی تراشیں ہم ماسکہ ہوں تو ثابت کرو کہ ج، ق، ن ایک مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں اور ج ن × ج ق مستقل ہے۔

[کرائسٹ کالج ۱۸۸۴ء]

۴۴۲ - ایک مخروطی تراش کا ماسکہ، مرتب، خروج المرکز تینوں دیئے ہوئے ہیں، ماسکہ میں سے گزرنے والا ایک دیا ہوا مستقیم خط منحنی کو دو نقطوں پر کاٹتا ہے اس کے معلوم کرنے کا ہندسی عمل دریافت کرو۔

[کوبن کالج ۱۸۸۴ء]

۴۴۳ - ایک شلجمی کا ماسکہ ایک ہلیلجی کے ایک ماسکہ پر منطبق ہوتا ہے، شلجمی ہلیلجی کے مزدوج محور کو مس کرتا ہے، ثابت کرو کہ ہلیلجی اور شلجمی کے ایک مشترک مماس کے محاذی ماسکہ پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۴۴ - ایک ہلیلجی کے ماسکے س اور سَ ہیں، اور اسکے اعظم اور اصغر محور ا ج اَ اور ب ج بَ ہیں ہلیلجی اور ایک ہم ماسکہ ہذلولی کا ایک نقطہ تقاطع ن ہے اور ہذلولی قاطع محور ا ج اَ ہے، ثابت کرو کہ

س ن = ا اَ، سَ ن = اَ ا اور ا ب = ج ن

[ترنتی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۴۵ - ایک دیئے ہوئے دائرہ کی سطح میں دو نقطے ن اور ق لئے گئے ہیں، ن ق کے متوازی دائرہ کا وتر ع س کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ ع س کے مختلف مقامات کے لئے ع ن اور س ق کے تقاطع کا طریق ایک مخروطی تراش ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۴۶- ایک دائرہ ایک ثابت نقطہ میں سے گزرتا ہے اور ایک دئے ہوئے مستقیم خط کو ایک مستقل زاویہ پر کاٹتا ہے، ثابت کرو کہ مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہے
[جیسس کالج ۱۸۸۴ء]

نوٹ " دائرہ مستقیم خط کو مستقل زاویہ پر کاٹتا ہے شاید اس کا یہ مطلب ہے کہ نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والا نصف قطر مستقیم خط سے مستقل زاویہ بناتا ہے، مترجم۔

۴۴۷- ایک تراش کے ایک وتر کے محاذی ماسکہ پر ایک مستقل زاویہ بنتا ہے، ثابت کرو کہ اسکے سروں پر کے مماس ایک دوسرے کو ایک ایسی مخروطی تراش پر قطع کرتے ہیں جسکا ماسکہ اور مرتب دونوں وہی ہیں جو اصلی تراش کے ہیں۔

[جون کالج ۱۸۸۳ء]

۴۴۸- ایک ہلیلجی اور ایک ہذلولی کا قاطع محور ایک ہی ہے اور ان کے خروج المرکز ایک دوسرے کے متکافی ہیں، اگر ایک منحنی کے ماسکہ سے دوسرے منحنی کے مماس کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ یہ مماس ایک دوسرے کو دو نقطوں پر قطع کرینگے اور ایک دوسرے سے زاویئے قائمے بنائیں گے، نیز ثابت کرو کہ یہ مماس مزدوج محوروں کو ایسے نقطوں پر قطع کرینگے جو امدادی دائرہ پر واقع ہونگے
[جون کالج ۱۸۸۴ء]

۴۴۹ - ایک مرکز دار تراش پر کوئی نقطہ ق ہے، اس نقطہ کو ماسکات س اور سَ کے ساتھ خطوط ق س اور ق سَ کے ذریعہ ملایا گیا ہے، یہ خط دوبارہ تراش کو ن اور نَ پر ملتے ہیں، اگر ن اور نَ پر کے مماس ط پر ملیں تو ثابت کرو کہ ق ط کی تنصیف محور اصغر پر ہوتی ہے، نیز ثابت کرو کہ ط کا طریق ایک مخروطی تراش ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۳ء]

۴۵۰ - ثابت کرو کہ ایک مرکز دار تراش کے دو نقطوں میں سے دو ایسے دائرے کھینچے جا سکتے ہیں جو تراش کو مس کریں اور یہ نقاط تماس ایک قطر کے سروں پر منطبق ہوتے ہیں۔

[کینز کالج ۱۸۸۳ء]

مخروط

۴۵۱ - ایک مخروط کا راس ا اور محور ا ب ہے، مخروط کے اندر ایک نقطہ س لیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ا ب کے ساتھ اُن تراشوں کی سطحیں جن کا ماسکہ س ہے ایسے حادے زاویے بناتی ہیں جن کا فرق زاویہ س ا ب کا دوچند ہے۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۴۵۲ - معلوم کرو کہ ایک دیے ہوئے مخروط سے ایک ایسی تراش کس طرح حاصل کی جائے جس کا خروج المرکز زیادہ سے زیادہ ہو۔

[آئی-سی-ایس ۱۸۸۶ء]

۴۵۳ - کن شرائط کے ماتحت ایک مخروط کی تراشش قائم ہذلولی ہوگی؟ ایسی صورت میں دریافت کرو کہ کاٹنے والی سطح کا ضروری میلان کس طرح معلوم کیا جائے۔

[آئی-سی-ایس ۱۸۸۵ء]

۴۵۴ - معلوم کرو کہ ایک مخروط کی ہذلولی تراش کا مرکز اور اس کے متقارب کس طرح دریافت کیے جائیں، نیز معلوم کرو کہ ایک دیے ہوئے مخروط سے ایک ایسا ہذلولی کس طرح کاٹا جائے جس کے متقاربوں کا درمیانی زاویہ بڑے سے بڑا ہو۔

[آئی، سی، ایس ۱۸۸۴ء]

۴۵۵ - ثابت کرو کہ ایک قائم مخروط کی ہذلولی تراش کا محور اصغر اُن مستدیر تراشوں کے قطروں کا وسط تناسب ہے جو ہلیلجی کے محور اعظم کے سروں میں سے مستوی سطحیں گزارنے سے پیدا ہوئی ہیں۔

اگر ہلیلجی کا ظل ایک ایسی مستوی سطح پر بنایا جائے جو مخروط کے محور پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ظل کے ماسکوں کا درمیانی فاصلہ اوپر کی دو مستدیر تراشوں

کے نصف قطروں کے فرق کے مساوی ہے۔

۴۵۶۔ ایک مستدیر مخروط کو مستوی سطحوں سے تراش کر شلجمی خطوں کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے، اس سلسلہ کے ہر ایک شلجمی کا محور ایک ایسے مستقیم خط و م کو قطع کرتا ہے جو مخروط کے راس و میں سے گزرتا ہے، اگر ایک تراش و م کو ل پر قطع کرے تو ثابت کرو کہ نسبت ول^۲ : ال × ج د تمام شلجمی خطوں کے لئے مستقل ہے اس میں ا تراش کا راس ہے، ج اسکی کرہ کا مرکز ہے اور د وہ نقطہ ہے جہاں تراش مخروط کے محور و د کو کاٹتی ہے

[پمبرک کالج ۱۸۸۶ء]

۴۵۷۔ اگر ایک مخروط کی دو تراشوں کا مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ تراشوں کے خاص وتروں (معدلون) کو آپس میں وہی نسبت ہے جو اُن کے خروج المرکزونکو آپس میں ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۵ء]

۴۵۸۔ ثابت کرو کہ اُن تمام مستوی تراشوں کے مرکزوں کا طریق جن کے ماسکوں کا باہمی فاصلہ وہی ہو ایک قائم مستدیر اسطوانہ ہے۔

[جون کالج ۱۸۸۸ء]

۴۵۹۔ ثابت کرو کہ اُن تمام تراشوں کے مرکز جن کے

اصغر محوروں کا طول ایک ہی ہو ایک ایسی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ایک ہذلولی کو قاطع محور کے گرد پھرانے سے حاصل ہوتی ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۶۰۔ ایک ہلیلجی مخروط بنانا منظور ہے جو دو دیئے ہوئے دائروں میں سے گزرے، یہ دائرے مختلف سطحوں میں واقع ہیں، معلوم کرو کہ اس عمل کے لئے کیا شرائط ضروری ہیں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۱۔ ایک ہلیلجی بلحاظ مقدار اور مقام کے دیا ہوا ہے، ثابت کرو کہ اُن قائم مخروطوں کے راسوں کا طریق جنہیں سے ہلیلجی مذکور کاٹا جاسکتا ہے ایک ہذلولی ہے جو ہلیلجی کے ماسکوں میں سے گزرتا ہے،

[جیسس کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۲۔ معلوم کرو کہ ایک قائم مخروط کو ایک مستوی سطح کے ذریعہ کس طرح کاٹا جائے کہ تراش ایک ہلیلجی ہو جس کا خروج المرکز دیا ہوا ہے اور جس کے محور اعظم کا طول بھی معلوم ہے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۳۔ ایک مخروط کا زاویہ راس قائمہ ہے، اس کو ایک مستوی سطح سے کاٹا گیا ہے، ثابت کرو کہ تراش

کے جو دو تماسی کرّے ہیں ان کے نیمقطروں کے مجموعہ کا مربع، تراش کے محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔

[پیٹر ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۶۴- دو قائم مستدیر مخروطوں کے راس ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے راسی زاویئے قائمے ہیں، نیز انکا ایک تکوینی خط مشترک ہے، اگر ایک ہی سطح مستوی سے ہر ایک مخروط کو کاٹا جائے تو ایک تراش کا محور اصغر دوسری تراش کے مزدوج محور کے برابر ہوگا۔

[کلیر کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۵- ثابت کرو کہ ایک قائم مستدیر مخروط کی شلجمی تراشوں کے وتر خاص ان فاصلوں کے متناسب ہیں جو تراشوں کے روئس اور مخروط کے راس کے درمیان ہوں۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۶- قائم مستدیر مخروطوں کا ایک سلسلہ ایسا ہے کہ اس سلسلہ کا ہر ایک مخروط ایک دئے ہوئے قائم ہذلولی میں سے گزرتا ہے، ثابت کرو کہ مخروطوں کے راسوں کا طریق ایک ہلیلجی ہے جس کا خروج المرکز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ہے۔

[پمبرک کالج ۱۸۸۵ء]

۴۶۷- دو متقاطع کرّے ایک قائم مخروط کے اندر بنائے گئے ہیں (یعنی اس کو داخلاً مس کرتے ہیں) اور انکا ایک مشترک نقطہ ن ہے، ثابت کرو کہ ن پر کی مماسی سطحیں

اُس مستقیم خط سے مساوی زاویے بناتی ہیں جو نقطہ ن کو مخروط کے راس سے وصل کرتا ہے۔

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۶ء]

۴۶۸ - اگر ایک قائم مستدیر مخروط کو ایسی مستوی سطح سے کاٹا جائے جو نہ تو محور کے متوازی ہو اور نہ ہی اُس پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ہر صورت میں تراش ہلیلجی ہوگی

[کوین کالج ۱۸۸۶ء]

۴۶۹ - ایک قائم مخروط کو کاٹنے سے مختلف ہذلولی تراشیں حاصل کی گئی ہیں اُن تراشوں کے محور مساوی ہیں (اور سب کے اعظم محور ایک ہی سطح میں واقع ہیں) ثابت کرو کہ ان تراشوں کے مرکزوں کا طریق ایک ہذلولی ہے

[کیتھرین کالج ۱۸۸۶ء]

۴۷۰ - ایک مخروط کی ایسی شلجمی تراش معلوم کرو جسکے وتر خاص کا طول ایک دی ہوئی مقدار کے مساوی ہو۔

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۱ء]

۴۷۱ - ثابت کرو کہ ایک قائم مخروط کی ہلیلجی تراش کا محور اصغر اُن عمودوں کا وسط تناسب ہے جو ہلیلجی کے راسوں سے مخروط کے محور پر نکالے جائیں، اگر مخروط کا راس ر ہو اور ھ وہ نقطہ ہو جہاں مخروط کا محور تراش کے محور اعظم ا اَ کو کاٹتا ہے،
تو ثابت کرو کہ

ج د : ج ا = ج س : ا ر + ج س

[ترنٹی کالج ۱۸۶۱ء]

۴۷۲ - ایک قائم مستدیر مخروط کو متوازی مستوی سطحوں سے کاٹکر ہذلولی تراشوں کا ایک سلسلہ حاصل کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ ان تراشوں کے امدادی دائرے ایک ایسے قائم مخروط پر واقع ہوتے ہیں جس کا قاعدہ ایک ہلیلجی ہے جو دئے ہوئے ہلیلجی خطوں کے متشابہ ہے۔

[ترنٹی ہوس ۱۸۸۲ء]

۴۷۳ - دو مخروطوں کے راسی زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے، اگر مستوی سطحوں کے ذریعہ ان مخروطوں کی وہ تراشیں حاصل کی جائیں جن کے خروج المرکز برابر ہوں تو ثابت کرو کہ ان خروج المرکزوں کے متکافیوں کے مربعوں کا مجموعہ ایک کے برابر ہے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۵ء]

۴۷۴ - ایک دیا ہوا مستقیم خط مخروط کے محور پر عمود ہے، معلوم کرو کہ کس طرح سے ایک تراش حاصل کی جائے جس کا مرتب یہ مستقیم خط ہو

[کوین کالج ۱۸۸۵ء]

۴۷۵ - ایک قائم مستدیر مخروط اور ایک ہلیلجی دونوں دئے ہوئے ہیں، ہلیلجی کو اسطرح رکھو کہ وہ مخروط کی ایک مستوی تراش ہو جائے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۷۶۔ ثابت کرو کہ مخروط کی ایک مستوی تراش کا وتر خاص ایسے بدلتا ہے جیسے وہ عمود جو مخروط کے راس سے تراش کی سطح پر نکالا جائے۔

[ترنٹی کالج ۱۸۸۳ء]

۴۷۷۔ اگر ایک مخروط کی دو مستوی تراشوں کا مرتب مشترک ہو تو ثابت کرو کہ ان کے ماسکوں کو ملانے والا خط مخروط کے محور میں سے گزرتا ہے۔

[کوین کالج ۱۸۸۴ء]

۴۷۸۔ ایک مخروط کا راسی زاویہ قائمہ ہے، ایک مستوی تراش کے محور اعظم پر مخروط کے راس سے ایک عمود نکالا گیا ہے اور یہ محور اعظم کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے، ثابت کرو کہ تراش کا نیم وتر خاص ان دو حصوں کا وسط تناسب ہے۔

[کیتھرین کالج ۱۸۸۴ء]

۴۷۹۔ دو مخروطوں کا راس مشترک ہے، ان کے محور ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتے ہیں اور ان کے راسی زاویوں کا مجموعہ دو قائموں کے برابر ہے، ایک مستوی سطح جو محوروں میں سے گزرنے والی سطح پر عمود ہے ان مخروطوں کو کاٹتی ہے، ثابت کرو کہ ہلیلجی تراشش کے کسی ایک ماسکہ کے فاصلے ہذلولی تراش کے ماسکوں سے بالترتیب مساوی ہیں

اُن فاصلوں کے جو مخروط کے راس اور ہر ایک تراش کے قاطع محوروں کے درمیان ہیں، نیز ثابت کرو کہ ہم مزدوج محوروں کے مربعوں کا مجموعہ ان فاصلوں کے حاصل ضرب کے برابر ہے۔

[ترنتی کالج ۱۸۸۴ء]

۴۸۰۔ اگر ایک مخروط کی تراش کا محور اصغر مستقل ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرکز سطح ہذلولی نما بالتدویر پر واقع ہوتا ہے۔

[جیسس کالج ۱۸۸۴ء]

ضمیمہ

ہلیلجی

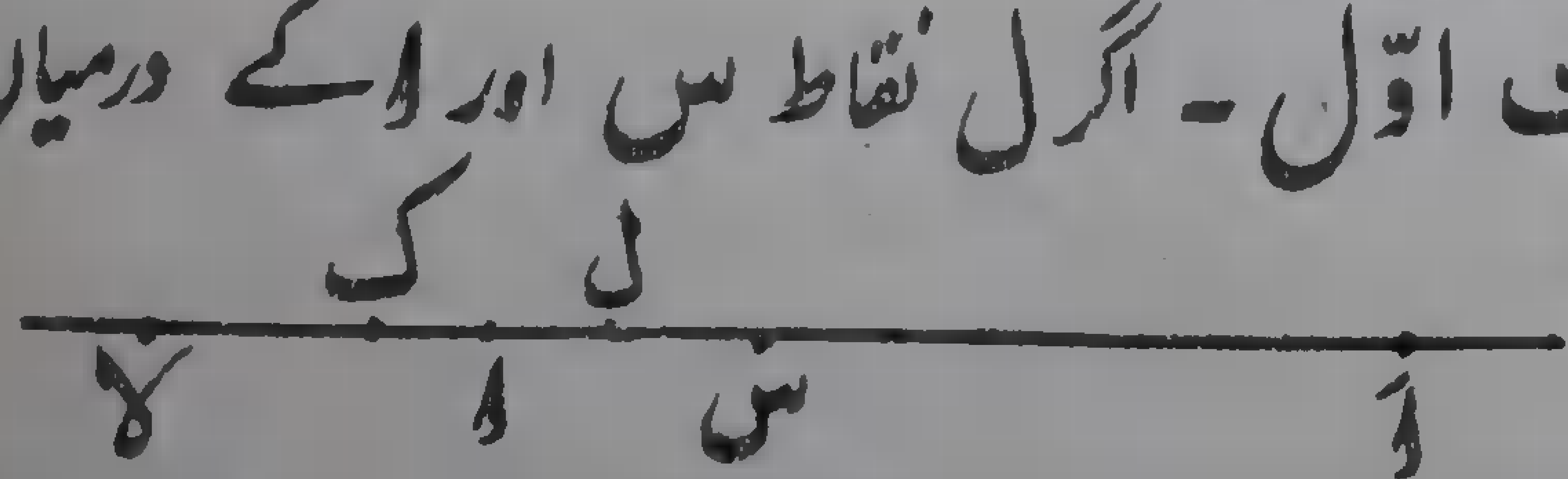
مسئلہ ۱ (مسلسل)

اگر ا اور اَ میں سے ایسے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی ان خطوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

س ل یا س ل ممدودہ پر ایک طول س ک قطع کرو کہ س ک = ر × لا ل

س کو مرکز اور ر × لا ل کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو، اب ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ نقطہ ل کن مقامات پر واقع ہو کہ ل ن اس دائرہ کو قطع کرے، یعنی ہمیں یہ معلوم کرنا ہے کہ نقطہ ل کے کن مقامات کے لئے س ک بڑا ہوگا س ل سے اور کن مقامات کے لئے چھوٹا ہوگا۔

صورت اوّل۔ اگر ل نقاط س اور ا کے درمیان واقع ہو



تو س ک = ر × ل لا > ر × لا ا یا س ا

∴ س ک > س ل

صورت دوم اگر ل نقاط س اور اَ کے درمیان واقع ہو۔



تو س ک = ر × لا ل

س اَ = ر × لا اَ

∴ عمل تفریق سے ک اَ = ر × ل اَ > ل اَ

∴ س ک > س ل

صورت سوم اگر ل، س اَ ممدودہ پر واقع ہو



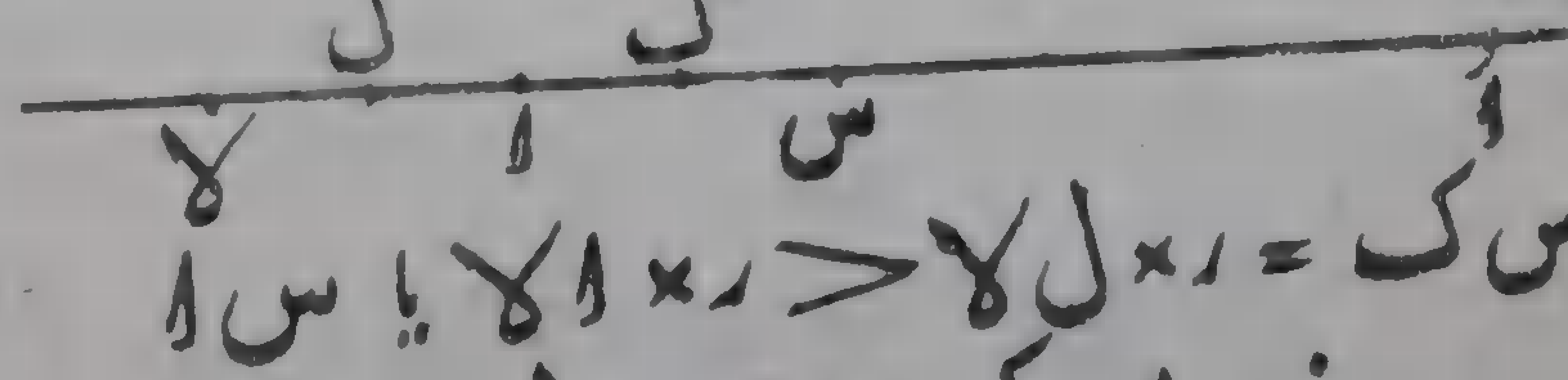
تو س ک = ر × لا ل

س اَ = ر × لا اَ

∴ عمل تفریق سے اَک = ر × اَل < اَل

∴ س ک < س ل

صورت چہارم۔ اگر ل نقاط ا اور لا کے درمیان واقع ہو۔



تو س ک = ر × ل لا < ر × ا لا یا س ا

∴ س ک < س ل

صورت پنجم۔ اگر ل، س لا ممدودہ پر واقع ہو۔



س ک = ر × لا ل ≥ لا لُ > س ل

اب ہم نے ثابت کردیا کہ اگر ل نقاط ا اور اَ کے درمیان محور ا اَ پر واقع ہو تو دائرہ عمود ل ن کو قطع کرتا ہے، لیکن اگر ل ا اَ کے باہر واقع ہو تو یہ دائرہ اس عمود کو قطع نہیں کرتا اسلئے معلوم ہوا کہ اگر ا اور اَ میں سے ایسے دو خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ہلیلجی بالتمام ان خطوط کے درمیان واقع ہوتا ہے

ہذلولی

مسئلہ ا (مسلسل)

اگر ا اور اَ میں سے خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ثابت کرو کہ منحنی ان خطوں کے بالکل واقع ہوتا ہے۔

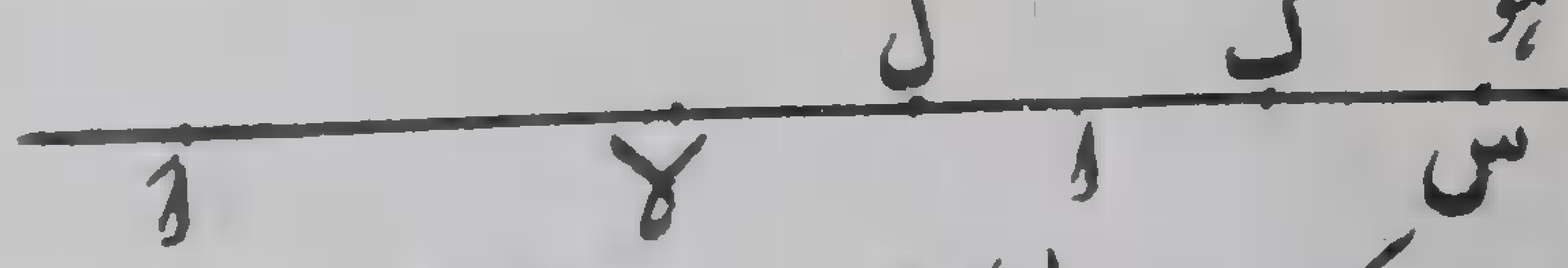
س ل یا س ل ممدودہ پر ایک طول س ک ایسا قطع کرو کہ

س ک = ر × لا ل

س کو مرکز اور ر × ل لا کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچو، اب یہ دیکھنا ہے کہ نقطہ ل کن مقامات پر واقع ہو کہ دائرہ مذکورہ عمود ل ن کو قطع کرسکے یعنی یہ معلوم کرنا ہے کہ ل کے کن مقامات کے لئے س ک بڑا ہوگا س ل سے اور کن مقامات کے لئے چھوٹا ہوگا۔

صورت اول اگر ل نقاط ا اور لا کے درمیان

واقع ہو



تو س ک = ر × ل لا > ر × ا لا یا س ا

∴ س ک > س ل

صورت دوم اگر ل نقاط لا اور اَ کے درمیان واقع ہو



س ک = ر × لا ل

س اَ = ر × لا اَ

∴ عمل تفریق سے ک اَ = ر × ل اَ > ل اَ

∴ س ک > س ل

صورت سوم اگر ل، س اَ ممدودہ پر واقع ہو



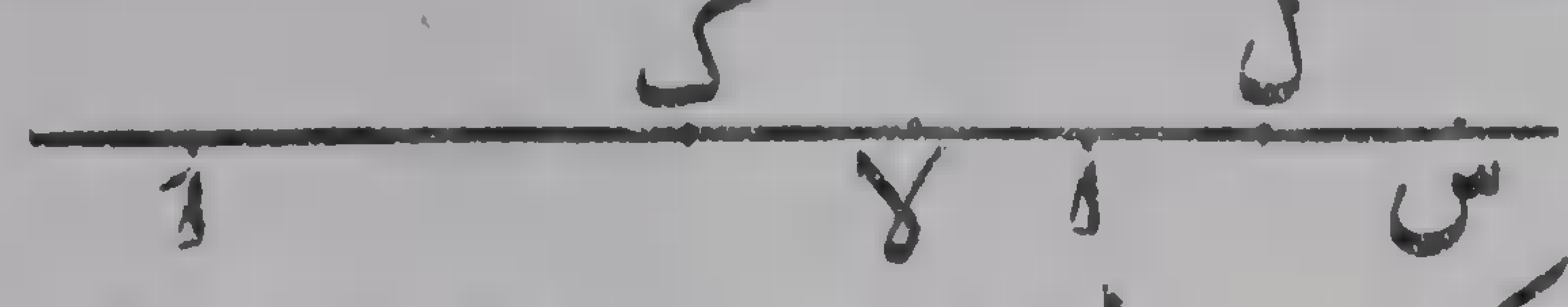
تو س ک = ر × لا ل

س اَ = ر × لا اَ

∴ عمل تفریق سے اَ ک = ر × اَ ل < اَ ل

∴ س ک < س ل

صورت چہارم اگر ل نقاط ا اور س کے درمیان واقع ہو



س ک = ر × ل لا > ر × الا یا س ا

∴ س ک > س ل

صورت پنجم



تو س ک = ر × لال > لال > س ل

اب ہم نے یہ ثابت کر دیا کہ اگر ل نقاط ا اور اَ کے درمیان محور کے کسی مقام پر واقع ہو تو دائرہ مذکورہ عمود ل ن کو قطع نہیں کرتا اور اگر ل، محور پر ا اَ کے باہر واقع ہو تو دائرہ عمود کو قطع کرتا ہے، پس معلوم ہوا کہ اگر ا اور اَ میں سے بالترتیب دو خط کھینچے جائیں جو محور پر عمود ہوں تو ہذلولی بالتمام ان خطوں کے باہر واقع ہوتا ہے

مشقی مثالوں کے حل کرنے میں ذیل کے مشہور مسائل کو مان لیا جائے۔

شلجمی

۱۔ اگر شلجمی کا کوئی وتر ن و نَ قطر ال لَ کو نقطہ و پر ملے اور اس قطر کے معین ن ل اور نَ لَ ہوں

تو $\text{ال} \times \text{الَ} = \text{او}^2$

(دیکھو مسئلہ ۱)

۲- مسئلہ ۱۷ کی شکل میں اگر ن ص پر عمود ق د نکالا جائے تو $\text{ی ذ}^2 = ۴ \, \text{ا س} \times \text{ن ص}$

(دیکھو مسئلہ ۷، اشتق ۱)

۳- شلجمی کا ایک مماس دو دیگر مماسوں کے جو حصے کرتا ہے اُن کی باہمی نسبت ہمیشہ مستقل رہتی ہے

(دیکھو عملیات ۱۱)

۴- اگر دو ثابت خطوں و ن، و نَ کو نقاط ما اور مَا پر اس طرح تقسیم کیا جائے کہ و ما اور و مَا ایک ثابت خطی ارتباط $\text{ل} \times \text{و ما} + \text{مہ} \times \text{و مَا} = ۱$ کے ذریعہ باہم منسلک ہو سکیں تو ثابت کرو کہ ما مَا ایک ایسے شلجمی کو لمس کرتا ہے جو و ن، و نَ کو مس کرتا ہے۔

سابق مسئلہ کی رُو سے

$$\frac{\text{ن ما}}{\text{و ما}} = \frac{\text{و مَا}}{\text{مَا نَ}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\text{و ن} - \text{و ما}}{\text{و ما}} = \frac{\text{و مَا}}{\text{و نَ} - \text{و مَا}}$$

اس لئے

$$\frac{\text{و ما}}{\text{و ن}} + \frac{\text{و ما}}{\text{و ن}} = ۱$$

یا $\text{ل} \times \text{و ما} + \text{مہ} \times \text{و مَا} = ۱$ جہاں

$$\text{ل} = \frac{۱}{\text{و ن}} ، \quad \text{مہ} = \frac{۱}{\text{و نَ}} ، \quad \text{وغیرہ}$$

۵۔ س ایک ثابت نقطہ ہے، ایک ثابت مستقیم خط
ا ما پر ایک نقطہ ما لیا گیا ہے اور س ما پر ما ن
قائم کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ما ن ایک ایسے شلجمی
کو لف کرتا ہے جس کا ماسکہ س ہے اور جس کے راس
پر کا مماس ا ما ہے

[مسئلہ ۱۰ کا عکس]

۶۔ س ایک ثابت نقطہ ہے، ایک ثابت مستقیم خط
و ق پر ایک نقطہ و لیا گیا ہے اور و قَ، و س سے
ایک مستقل زاویہ (عہ) بناتا ہے، و قَ ایک ایسے
شلجمی کو مس کرتا ہے جس کا ماسکہ س ہے اور جو و ق
کو ایک ثابت نقطہ ق پر مس کرتا ہے جہاں زاویہ

س ق و = عہ

[یہ ایک مسئلہ عامہ ہے جس کی خاص صورت آخری مسئلہ
ہے، یہ مسئلہ ۱۳ کا عکس ہے]

۷۔ دو ثابت مستقیم خط و ق، و قَ ہیں، انکے درمیان
ایک نقطہ س ہے ایک خط ق قَ ایسا کھینچا گیا ہے کہ
< ق س قَ = ۲ - ق و قَ، ق قَ کا لفاف ایک
ایسا شلجمی ہے جس کا ماسکہ س ہے اور جو و ق، و قَ کو
مس کرتا ہے۔ [مسئلہ ۲ کا عکس]

۸۔ مماسی مثلث کا مرکز عمودی مرتب پر واقع ہوتا ہے
[دیکھو عملیات ۱۴]

مخروطی تراشین

۱۔ اگر ن پر کا مماس مرتب کو سے پر اور وتر خاص کو ک پر ملے تو س ک : س سے = ر

[دیکھو ہذلولی کے مسئلہ ۱۰ کی مثالیں]

۲۔ ایک دیئے ہوئے دائرہ کا ایک ثابت قطر ا اَ ہے دو نقطے س سَ مرکز سے متساوی الفصل ہیں س ما، سَ مَا متوازی مستقیم خط ہیں جو دائرہ کو ما، مَا پر ملتے ہیں تب

(۱) اگر س، سَ دائرہ کے اندر ہوں تو ما مَا کا لفاف ایک ہلیلجی ہے۔

(۲) اگر س، سَ دائرہ کے باہر ہوں تو ما مَا کا لفاف ایک ہذلولی ہے جس کا امدادی دائرہ، دائرہ معلومہ ہے

یا اگر س، سَ دو ثابت نقطے ہوں اور س ما، سَ مَا دو ایسے متوازی خط ہوں کہ س ما × سَ مَا = مستقل مقدار تو ما مَا کا لفاف ہلیلجی ہوگا اگر س ما اور سَ مَا خط س سَ کی ایک ہی جانب میں کھینچے جائیں اور لفاف ہذلولی ہوگا اگر س ما، سَ مَا خط س سَ کے متقابل جانبوں میں کھینچے جائیں۔

[دیکھو مسئلہ ہلیلجی ۱۴ اور مسئلہ ہذلولی ۱۳]

۳۔ ج د، ج دَ دو ثابت مستقیم خط ہیں اور د دَ اس طرح کھینچا گیا ہے کہ △ ج د دَ کا رقبہ ہمیشہ مستقل ہوتا ہے، د دَ کا لفاف ایک ہذلولی ہے جس کے متقارب ج د، ج دَ ہیں۔

[دیکھو مسئلہ ہذلولی ۳۱]

۴۔ اگر ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہو اور قاعدہ کے متصلہ زاویوں کا فرق بھی معلوم ہو تو ثابت کرو کہ راس کا طریق ایک ہذلولی ہوتا ہے۔

اگر فرق معلوم زاویہ قائمہ کے برابر ہو تو طریق ایک قایم ہذلولی ہوتا ہے

[دیکھو عملیات ۳۳۵]

۵۔ ہم ماسکہ مخروطی تراشوں کا ایک نظام دیا ہوا ہے، ایک مخروطی تراش کو ایک ثابت مستقیم خط دو نقطوں پر ملتا ہے، اگر ان نقطوں پر عماد کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ انکے تقاطع کا طریق ایک مستقیم خط ہے۔

[دیکھو مثال ۴۲۰]

۶۔ ایک دئے ہوئے مستقیم خط کے قطبوں کا طریق بلحاظ ہم ماسکہ مخروطی تراشوں کے ایک نظام کے، ایک مستقیم خط ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ ا ب دیا ہوا مستقیم خط ہے، وہ ہم ماسکہ تراش کھینچو جو ا ب کو ن پر مس کرے ا ب پر عمود

ن گ قائم کرو، ا ب کا قطب بلحاظ اس ہم ماسکہ کے ن ہے یعنی یہ ن گ پر واقع ہوتا ہے۔ ایسی اور ہم ماسکہ کے مماس ن ط، ن طَ کھینچو۔ ا ب، ن گ زاویہ س ن سَ کی تنصیف کرتے ہیں اسلیئے وہ زاویہ ط ن طَ کی تنصیف کرتے ہیں یعنی معلوم ہوا کہ ا ب، ن گ خطوط ن ط، ن طَ کے موسیقی خط ہیں۔

اسلیئے ا ب، ن گ مزدوج ہیں بلحاظ اس مخروطی تراش کے جس کے مماس ن ط، ن طَ ہیں اسلیئے ا ب کا قطب بلحاظ اس تراش کے ن گ پر واقع ہوتا ہے۔

۷۔ ایک مخروطی تراش پر کے ایک نقطہ کو تراش پر کے چار نقطوں کے ساتھ ملانے سے پنسل بنتی ہے اس کی غیر موسیقی نسبت مستقل ہوتی ہے۔ [تقلیل]

یا مرتب کو قاطع (خط) مان کر پنسل کے راس کو بدلو اور س پر لے جاؤ اس پنسل کے زاوے مسئلہ ۲ کی رو سے مستقل ہیں کیونکہ یہ اُس پنسل کے زاویوں کے نصف ہیں جو س کو ثابت نقاط کے ساتھ ملانے سے بنتی ہے۔

۸۔ نیز اگر کسی مخروطی تراش کے چار ثابت نقطوں پر مماس کھینچے جائیں اور ایک اور مماس انکو چار نقطوں پر ملے تو اس وسعت کی غیر موسیقی نسبت مستقل ہوگی اور پنسلوں کی نسبت کے برابر ہوگی۔

[متکافی کرو]

۹۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی تراش کے اندر بنائی جائے تو متقابل اضلاع کے جو تین زوج ہیں ان کے تین نقاط تقاطع ایک مستقیم خط پر واقع ہونگے سپاسکل کا مسئلہ
• مخروطی ظل بناؤ جسمیں متقابل اضلاع کے دو زوج متوازی ہوں اسکے بعد قائم تظلیل کے ذریعہ شکل کے ظل کو دائرہ بناؤ وغیرہ۔

۱۰۔ اگر ایک مسدس ایک مخروطی تراش کے گرد بنائی جائے تو اس کے تین قطر ایک دوسرے کو ایک نقطہ پر قطع کرینگے۔ [برانشان کا مسئلہ]

(متکافی کرو)

۱۱۔ ایک دائرہ کا مرکز و ہے، ثابت کرو کہ اس کا قطبی متکافی بلحاظ کسی نقطہ (س) کے ایک مخروطی تراش ہے جسکا ماسکہ س ہے، اور نظیری مرتب و کا قطبی متکافی ہے اور خروج المرکز س و اور دائرہ کے نصف قطر کی باہمی نسبت کے برابر ہے،

۱۲۔ اگر ایک نظام کے دائروں کا اصلی محور ایک ہی ہو تو ثابت کرو کہ انکے قطبی متکافی بلحاظ ایک انتہائی نقطہ کے ہم ماسکہ مخروطی تراشیں ہونگی۔

تمام شد

ہندسی مخروطات

A

Abscissa	فصلہ
Aliter	متبادل ثبوت
Alternate segment	متبادل قطعہ
Analysis	تحلیل
Angular point	نقطۂ راس
Anharmonic (Range, penoil)	غیر موسیقی وسعت۔پنسل
Auxuliary circle	امدادی دائرہ
Asymptote	متقارب
Asymptotio (cone, circle)	متقارب (مخروط دائرہ)
Axis (Axes)	محور۔ محاور
Axial plane	محوری سطح

....

B

Bead	منکہ

Branch (of hyperbola)	شاخ (قطع زائد)

....

C

Centre of Ellipse	مرکز (ہلیلجی)
Centre of Gravity	مرکز ثقل
Central Conic	مرکزدار تراش
Centroid	مرکز ہندسی
Chord (S)	وتر - اوتار
Coaxial (parabola)	ہم محور - (مکافی)
Collinear	ہم خط
Collinearity	ہم خطیّت
Confocals	ہم ماسکات
Confocal Parabolas	ہم ماسک مکافی
Concavity	قعر
Concylic points	ہم محیط نقطے
Cone	مخروط
Conical	مخروطی
Conics	مخروطات
Concentric	ہم مرکز
Conicoid	مخروطی نما
Conjugate diameters	مزدوج قطر

Conjugate hyperbola	مزدوج ہذلولی
Conoid	مخروط نما
Construction	عمل
Contact	تماس
Conoidal Surface	مخروط نما سطح
Corresponding points	نظیری نقطے
Corresponding chords	نظیری وتر
Correspondence	نظیریت
Curve (S)	منحنی ۔ منحنیات
Curve of Section	تراش کا منحنی
Curvilinear Quadrilateral	منحنی ذوارلبعۃ الاضلاع
Cylinder	اسطوانہ
Cylinderoid	اسطوانہ نما

....

D

Diagonal	قطر
Diameter	قطر ۔ اقطار
Divide harmonically	موسیقی نسبت میں تقسیم کرو
Directrix (ices)	مرتب ۔ مرتبات
Director Circle	مرتب دائرہ
Double Ordinate	دوگنا معین

Drawing pins	نقشہ کشی کی مکھی
Duplicate ratio	نسبت مثناۃ
Dimensions	ابعاد

....

E

Eccentricity	خروج المرکز
Endless String	رسی کا حلقہ
Enunciation	دعویٰ
Ellipse	ہلیلجی
Elliptical (functions, integrals)	ہلیلجی (جملات ۔ کلیات)
Ellipticity	ہلیلجیت
Ellipsoid	ہلیلجی نما
Elliptic section of a cone	مخروط کی ہلیلجی تراش
Envelope (V.N)	لف کرنا ۔ لفاف
Exterior angle	خارجی زاویہ
External angle	خارجی منصف
External bisector	خارجی منصف
Equi-conjugate (diameters)	مساوی مزدوج اقطار

....

F

Family of a curve	ایک منحنی کا قبیل

Feet (of a perpendicular)	پایوں - پائین (عمود کے)
Focus	ماسکہ
Focal distance	ماسکی فاصلے
Focal Sphere	ماسکی کرہ

....

G

Generating line	تکوینی خط
Generator	مکوّن
Geometrical Conics	ہندسی مخروطات

....

H

Harmonic section	موسیقی تقسیم
Hyperbola	قطع زائد ہذلولی
Hyperbolic	ہُذلوُلی
Hyperboloid	ہذلولی نما
Hyperbolic Paraboloid	ہذلولی شلجمی نما
Hyperbolic section	ہذلولی تراش
Hyperdoloid of Revolution	تدویری ہذلولی نما

....

I

Image	عکس

Intercept (S)	مقطوعہ
Internal Bisector	داخلی منصف

....

L

Latus Rectum	وتر خاص
Locus	طریق
Linear Dimensions	خطی ابعاد
Linear relation	خطی ارتباط
Limiting points	انتہائی نقطے

....

M

Major axis	محور اعظم
Maximum (ma)	اعظم - اعظمات
Mean Proportional	وسط تناسب
Minor axis	محور اصغر
Minimum (ma)	اقل - اقلات
Mechanical Construction	بنائیکی آلی ترکیب
Metrical Properties	امتدادی خاصیتیں

....

N

Normal	عماد

O

Ordinate	معیّن
Orthogonal Projection	قائم تظلیل
Orthocentre	مرکز عمودی

P

Problem	عملیہ
Parabola	قطع مکافی ۔ شلجمی
Parabolic	شلجمی ۔
Paraboloid	شلجمی نما
Point of contact	نقطہ تماس
Projection (S)	تظلیل ظل ۔ اظلال
Project	تظلیل کرو
Pole	قطب
Polar	قطبی
Polarity	قطبیت
Parallel Ruler	متوازی مسطر
Principal Axis	محاور اولیہ
Polar Reciprocal	قطبی مکافی

Q

Quadrants	ربعات

R

Radius Vector	نیم قطر سمتی
Radical Axis	اصلی محور
Rider	ردیف
Rectangle (contained by Segments)	سطح (سطوح)
Rectangular Hyperbola	قائم ہذلولی
Rectilinear	مستقیم
Right Circuler Cylinder	قائم مستدیر اسطوانہ
Rotors	دوری دوریات
Roll	لڑھکنا
Revolve	چکر لگانا
Reciprocate	متکافی کرنا
Range	وسعت

S

Scalar (quantities)	میزانی مقداریں
Scalars	درجیات
Semi Latus Rectum	نیم وتر خاص

Semi conjugate diameters	نیم مزدوج قطر
Similiar and Similiarly Situated Parabola	شکلاً و وضعاً متشابہ شلجمی
Sub-tangent	زیر مماس
Sub-Normal	زیر عماد
Supplementry Chords	تکمیلی اوتار
Symmetry	تشاکل
Symmetrical	متشاکل

....

T

Tangent	مماس
Tangent triangle	مماسی مثلث
Tangential	مماسی
Transverse Axis	قاطع محور
Transversal	قاطع
Triads of lines	خطوں کا ثلاثیہ

....

V

Vertex (ices)	راس (رؤس)
Vector (S)	سمتی ـ سمتیات

....